Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Határozza meg azt a tízes számrendszerben felírt legkisebb természetes számot, amely 57-ed részére csökken, ha az első számjegyét elhagyjuk.

Megoldás:
Legyenek a keresett A szám számjegyei sorrendben, a legmagasabb helyi értékű számjeggyel kezdve

$$a_n\,, a_{n-1}\,, \dots, a_1\,, a_0\,.$$

Ekkor a szám a tízes számrendszerben felírva:

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0\,.$$

Ha az A szám első, azaz a legmagasabb helyiértékű jegyét elhagyjuk, akkor a kapott szám értéke

$$B = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0\,.$$ 1 pont

A feltétel szerint $A = 57 \cdot B$, azaz

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 = 57 \cdot (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0)\,,$$

vagyis

(1) $$a_n \cdot 10^n = 56 \cdot (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0)\,.$$ 2 pont

Az (1) egyenlet jobb oldalán 56 osztható 7-tel, ezért az egyenlet bal oldala is osztható 7-tel.

Mivel 7 és 10 relatív prímek, ezért 7 és 10^n is relatív prímek, ami pontosan azt jelenti, hogy a_n osztható 7-tel.

Nyilvánvaló, hogy $a_n \neq 0$, továbbá a_n számjegy, ezért csakis $a_n = 7$ lehetséges. 2 pont

Az (1) egyenlet mindkét oldalát az $a_n = 7$ számmal osztva azt kapjuk, hogy

(2) $$10^n = 8 \cdot (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0)\,.$$ 1 pont

A (2) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés osztható 8-cal, így a bal oldal is osztható kell legyen 8-cal.
Mivel $(8; 10) = 2$ és $8 = 2^3$, ezért ez csakis úgy állhat fenn, ha

$$n \geq 3\,.$$ 1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő legkisebb számot keressük, ezért megvizsgáljuk a (2) egyenletet $n = 3$ esetén:

$$10^3 = 8 \cdot (a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0)\,.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát 8-cal osztva

$$125 = a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0\,,$$

ahonnan

$$a_2 = 1, \qquad a_1 = 2, \qquad a_0 = 5\,.$$ 1 pont

A feladat feltételeinek megfelelő legkisebb tízes számrendszerbeli szám tehát:

$$7125\,.$$ 1 pont

Erre a számra valóban teljesülnek a feltételek, hiszen

$$7125 = 57 \cdot 125$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az

$$\frac{x}{y} - 1 = 1 - \frac{y}{x}; \qquad x^5 + y^5 + x^2 + y^2 = 0$$

egyenletrendszert.

<u>Megoldás:</u> Az első egyenletből kezdeti feltételként az következik, hogy $x \neq 0$ és $y \neq 0$. 1 pont

Az első egyenlet mindkét oldalát az $x \cdot y \neq 0$ kifejezéssel szorozva, rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0\,,$$

amelyből a nevezetes algebrai azonosság alkalmazása után az következik, hogy

(1) $$(x - y)^2 = 0\,.$$ 2 pont

Az (1) egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $x - y = 0$, azaz, ha

$$x = y\,.$$ 1 pont

A kapott összefüggés miatt az egyenletrendszer második egyenlete a következő:

$$x^5 + x^5 + x^2 + x^2 = 0\,,$$

vagyis

$$2x^5 + 2x^2 = 0\,,$$

ahonnan szorzattá alakítással

(2) $$2x^2 \cdot (x^3 + 1) = 0\,.$$ 2 pont

A (2) egyenlet egyik megoldása az $x = 0$ valós szám, ez azonban nem felel meg a kezdeti feltételnek, ezért nem megoldás. 1 pont

A (2) egyenlet másik megoldása az $x^3 + 1 = 0$ egyenletből adódó $x = -1$ valós szám. 2 pont

Ez megfelel a kezdeti feltételnek, és számolással egyszerűen ellenőrizhető, hogy az ebből adódó

$$x = -1, \qquad y = -1\,.$$

számpár az egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégíti, ez a számpár a feladat egyetlen megoldása. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

a) Az első egyenlet mindkét oldalát közös nevezőre hozva az

$$\frac{x-y}{y} = \frac{x-y}{x}$$

egyenletet kapjuk, amelyből $x = y$ következik.

b) A versenyző az $x = y$ összefüggéshez például úgy is eljuthat, hogy az első egyenletből az

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$$

átalakítást végrehajtva hivatkozik

$$\frac{x}{y} = a$$

választással, a nyilvánvaló $a > 0$ mellett fennálló

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

nevezetes egyenlőtlenségre, illetve arra, hogy ebben az egyenlőtlenségben az egyenlőség pontosan akkor igaz, ha $a = 1$.

c) Az első 1 pontot akkor is megkapja a versenyző, ha a megoldás végén indokolja, hogy az $x = 0$ miért nem lehet megoldás.

3. Adja meg az

$$\frac{x^2}{x-1}$$

kifejezés minimális értékét, ha x olyan valós szám, amelyre $x > 1$ teljesül.

1. megoldás: Vizsgáljuk, hogy milyen k értékekre oldható meg az

$$\frac{x^2}{x-1} = k$$

egyenlet. 1 pont

Mivel x^2 és $x-1$ is pozitívak, ezért csak a legkisebb lehetséges k értéket kell megtalálnunk. 2 pont

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a pozitív $(x-1)$-gyel, majd rendezzük nullára az egyenletet:

$$x^2 = kx - k\,,$$

(1) $$x^2 - kx + k = 0\,.$$ 2 pont

A kapott másodfokú egyenletnek csak abban az esetben vannak valós gyökei, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$D \geq 0\,,$$

azaz

$$k^2 - 4k \geq 0\,.$$ 1 pont

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldásai a

$$]-\infty; 0] \cup [4; \infty[\,.$$

halmazba tartozó k számok. 2 pont

Innen már egyszerűen látható, hogy a tört legkisebb lehetséges pozitív értéke

$$k = 4\,.$$ 1 pont

A tört ezt az értéket fel is veszi, mikor az (1) egyenlet diszkriminánsa éppen 0.
Ekkor az egyenlet

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0\,,$$

ennek megoldása pedig

$$x = 2\,.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás: Az

$$\frac{x^2}{x-1}$$

algebrai törtet ekvivalens átalakításokkal más alakba írjuk.
A tört számlálójából 1-et elvéve és 1-et hozzáadva:

(1) $$\frac{x^2}{x-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x-1}.$$ 2 pont

A számláló zárójeles kifejezése szorzattá alakítható, ezért:

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)+1}{x-1},$$

ahonnan további ekvivalens átalakításokkal azt kapjuk, hogy

(2) $$\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}.$$ 2 pont

A (2) összefüggés így is írható:

(3) $$\frac{x^2}{x-1} = x-1+\frac{1}{x-1}+2.$$ 2 pont

Az $x > 1$ feltétel miatt $x-1 > 0$. Egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, ezért

$$x-1+\frac{1}{x-1}+2 \geq 4.$$ 1 pont

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $x-1=1$, azaz, ha $x=2$. 1 pont

Az

$$\frac{x^2}{x-1}$$

kifejezés minimális értéke tehát 4. 1 pont

Ezt az értéket a kifejezés $x=2$ esetén veszi fel. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. megoldás: Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

függvényt.
A feltétel miatt a függvény értelmezési tartománya a $D_f =]1; \infty[$ számhalmaz.

Az $f(x)$ függvény differenciálható, első deriváltja

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}.$$ 1 pont

Az $f(x)$ függvénynek azon az x_0 helyen lehet szélsőértéke, ahol $f'(x_0) = 0$. 1* pont

Az $f'(x)$ függvénynek csak a számlálója lehet zérus, ezért $f'(x)$ zérushelyei az

$$x_{01} = 0, \qquad x_{02} = 2$$

valós számok. 1 pont

Az $x_{01} = 0$ megoldás nem eleme a $D_f =]1; \infty[$ értelmezési tartománynak, ezért kizárjuk. 1 pont

Az $x_{02} = 2$ megfelel a feltételnek, ez az $f'(x)$ függvény egyetlen zérushelye. 1 pont

Meg kell még vizsgálnunk, hogy $f'(x)$ függvény az $x_{02} = 2$ helyen előjelet vált-e. 1* pont

Ha $x \in]1; 2[$, akkor világos, hogy minden ilyen x-re $f'(x) < 0$, valamint, ha $x \in]2; \infty[$, akkor minden ebbe az intervallumba eső x valós számra $f'(x) > 0$.

Ez pontosan azt jelenti, hogy $f'(x)$ az $x_{02} = 2$ pontban előjelet vált. 2* pont

Mivel $x \in]1; 2[$ esetén $f'(x) < 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő, továbbá, ha $x \in]2; \infty[$, akkor ezen az intervallumon $f'(x) > 0$ miatt $f(x)$ szigorúan monoton növekvő. 1* pont

Ebből az következik, hogy az $f(x)$ függvénynek az értelmezési tartomány $x_{02} = 2$ helyén minimuma van.
A minimum értéke behelyettesítéssel $f(2) = 4$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a versenyző a *-gal megjelölt pontokat nem kaphatja meg, ha nem hivatkozik arra, hogy $f'(x_0) = 0$ szükséges, de nem elégséges feltétele a szélsőértéknek, illetve nem vizsgálja $f'(x)$ előjelváltását az $x_{02} = 2$ helyen, valamint $f(x)$ monotonitását $x_{02} = 2$ bal- illetve jobb oldali környezetében.

4. Megoldás:
Megmutatjuk, hogy a kifejezésre teljesül, hogy

(1) $$\frac{x^2}{x-1} \geq 4\,.$$ 1 pont

Kiindulva az (1) egyenlőtlenségből, ekvivalens átalakításokat hajtunk végre.

Mivel a feltétel szerint $x > 1$, ezért $x - 1 > 0$, tehát (1) mindkét oldalát az $x - 1$ kifejezéssel szorozva a relációjel nem fordul meg, azaz

$$x^2 \geq 4 \cdot (x-1)$$

ekvivalens átalakítás. 2 pont

A kapott egyenlőtlenségből az

$$x^2 \geq 4x - 4\,,$$

illetve

(2) $$x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

egyenlőtlenségek is ekvivalens módon következnek. 2 pont

Ismert algebrai azonosság alapján $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Eszerint a (2) egyenlőtlenség így is írható:

$$(x-2)^2 \geq 0\,.$$ 1 pont

A kapott egyenlőtlenség a valós számok halmazán nyilvánvalóan teljesül. Egyenlőség pontosan akkor van, ha

$$x = 2\,.$$ 1 pont

Átalakításaink a feltétel figyelembevételével ekvivalensek voltak, ezért a kiinduló egyenlőtlenség is igaz. 1 pont

Ezért az

$$\frac{x^2}{x-1}$$

kifejezés minimális értéke 4. 1 pont

Ezt az értéket a kifejezés $x = 2$ esetén veszi fel. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Igaz-e, hogy 50 pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani 8-at úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely két szám különbsége osztható legyen 7-tel?

Megoldás:

Két pozitív egész szám különbsége pontosan akkor osztható 7-tel, ha 7-tel osztva azonos maradékot adnak. 1 pont

Pozitív egész számokat 7-tel osztva a lehetséges maradékok:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ,$$

azaz összesen hétféle maradék. 2 pont

Alkalmazzuk a skatulyaelvet!
Ha pozitív egész számok egy halmazát vizsgálva a halmazban minden 7-tel való osztási maradék legfeljebb hétszer fordulna elő, akkor ebben a halmazban legfeljebb

$$7 \cdot 7 = 49$$

pozitív egész szám lehetne. 2 pont

A feladatbeli halmazban azonban 50 pozitív egész szám van, ezért biztosan van olyan 7-es maradék, amely legalább 8-szor fordul elő. 2 pont

Az ennek a 7-es maradéknak megfelelő nyolc pozitív egész számot kiválasztva, bármely kettő különbsége osztható lesz 7-tel. 2 pont

A indoklás alapján kijelenthetjük, hogy a feladatbeli állítás igaz, tehát tetszőleges 50 pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani 8-at úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely két szám különbsége osztható legyen 7-tel. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A feladat állítása 50 darab egész számra is igaz.

5. Mátyás király egy csatában aratott győzelmet ünnepel a visegrádi palotában. A trónteremben először négy hadvezérét fogadja.

a) A trónteremben a királyon és a hadvezéreken kívül más nem tartózkodik. Mindenki kezében egy-egy kupa bor van, sétálgatnak, beszélgetnek a győztes csatáról. Azt veszik észre, hogy minden pillanatban bármely két személy között a távolság különböző. A király adott jelére mindenki (a király is) átadja a kupáját a hozzá legközelebb levő személynek.
Igazoljuk, hogy ezután lesz olyan személy a trónteremben, akinek a kezében egynél több kupa van.

b) A hadvezérek távozása után Mátyás király 50 lovagját fogadja a trónteremben. Mindenki kezében ismét egy-egy kupa bor van és a beszélgetés minden pillanatában bármelyik két ünneplő személy közötti távolság különböző. A király a lovagoknak is jelez, a jelre az 50 lovag és a király is átadja kupáját a hozzá legközelebb álló személynek.
Mutassuk meg, hogy ezúttal is lesz olyan személy a teremben, akinek a kezében legalább két kupa van.

<u>Megoldás:</u>

a) A trónteremben tartózkodó 5 személy közötti távolságok száma pontosan 10, és a feladat feltétele szerint ez a 10 távolság mind különböző, legyenek ezek a távolságok nagyság szerint növekvő sorrendben

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{10}\,.$$

Jelöljük a trónteremben tartózkodók közül A_1-gyel és A_2-vel azt a két személyt, akik között a távolság az előbbi 10-féle távolság közül a legkisebb, azaz a_1. 1 pont

A feltétel szerint a többiek közül senki nincs, akinek akár A_1-től, akár A_2-től való távolsága a_1 lenne. Ezért ez a két személy a király jelére biztosan kicseréli egymással a kupáját. 1 pont

Ha másik három személyt A_3, A_4, A_5-tel jelöljük, és van köztük olyan, akinek A_1-től, vagy A_2-től mért távolsága a_2, akkor ez a személy átadja A_1-nek, vagy A_2-nek a kupáját, ezért A_1-nek, vagy A_2-nek biztosan legalább két kupája lesz. 1 pont

Ha pedig A_3, A_4, A_5 között nincs olyan, akinek, A_1-től, vagy A_2-től mért távolsága a_2 lenne, akkor ez a távolság A_3, A_4, A_5 közül valamelyik két személy között van, ez a két személy kicseréli egymás között a kupáját.
Ekkor viszont az ötödik személy valamelyiküknek, a hozzá legközelebb levőnek átadja a kupáját, akinek így két kupája lesz. 1 pont

b) Jelöljük a trónteremben tartózkodó 50 lovagot és a királyt $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{51}$-gyel, akik között a fellépő távolságok ismét mind különbözők, ezek száma

$$\binom{51}{2} = 1275\,,$$

legyenek ezek a távolságok növekvő sorrendben

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{1275}\,.$$

A teremben biztosan van két személy, akik közötti távolság éppen a_1, legyen ez a két személy A_1, A_2, ők a király jelére kicserélik egymás között a kupáikat, és a továbbiakban már senkinek nem adják azt át.
Ha a teremben tartózkodó további 49 személy, azaz $A_3, A_4, \dots, A_{51}$ között van valaki, akinek A_1-től vagy A_2-től való távolsága éppen a nagyságrendi sorrendben következő, azaz a_2 távolság, az a feltétel szerint átadja a kupáját A_1-nek vagy A_2-nek, és ezért egyiküknek legalább két kupája lesz. 1 pont

Ha $A_3, A_4, \dots, A_{51}$ között senki sincs, akinek A_1-től vagy A_2-től való távolsága éppen a_2, akkor ez a távolság az $A_3, A_4, \dots, A_{51}$ közül valamelyik két személy között lép fel.
Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy ez a két személy A_3 és A_4. Ők biztosan kicserélik egymás között a kupáikat és később már senkinek nem adják azt át. 1 pont

Ezután az A_1, A_2, A_3, A_4 személyek bármelyik két-két tagja közt fellépő összesen

$$\binom{4}{2} = 6$$

távolságot töröljük, hiszen A_1, A_2, A_3, A_4 semelyik tagja már nem ad át kupát senkinek. 2 pont

Vizsgáljuk a megmaradt távolságokat, nyilván ezek között is van legkisebb, legyen ez a_k.
Ha ez az $A_5, A_6, \dots, A_{51}$ személyek valamelyike és az A_1, A_2, A_3, A_4 bármelyik tagja közt lép fel, akkor ez a személy átadja a kupáját az A_1, A_2, A_3, A_4 személyek közül valakinek, akinek így legalább két kupája lesz.

Ha ez nem áll fenn, akkor a_k biztosan az $A_5, A_6, \dots, A_{51}$ személyek közül valamelyik kettő, például A_5, A_6 között lép fel, akik a feltételek miatt kicserélik egymás között a kupáikat.

Ezután az $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ személyek közötti mindazon távolságokat töröljük, amelyeket még nem töröltünk, és kiválasztjuk a megmaradt távolságok közül a legkisebbet.

Az eljárás folytatásával eljutunk öt személyhez, legyenek ezek $A_{47}, A_{48}, A_{49}, A_{50}, A_{51}$.
A még nem törölt távolságoknak nyilván ismét van minimuma, legyen ez a_m.
Ha a_m az $A_{47}, A_{48}, A_{49}, A_{50}, A_{51}$ személyek valamelyike, és az $A_1, A_2, \dots, A_{45}, A_{46}$ személyek valamelyike között van, akkor $A_{47}, A_{48}, A_{49}, A_{50}, A_{51}$ valamelyike átadja a kupáját $A_1, A_2, \dots, A_{45}, A_{46}$ valamelyikének, akinek így legalább két kupája lesz. Ellenkező esetben a_m az $A_{47}, A_{48}, A_{49}, A_{50}, A_{51}$ személyek közül valamelyik kettő között lép fel. 1 pont

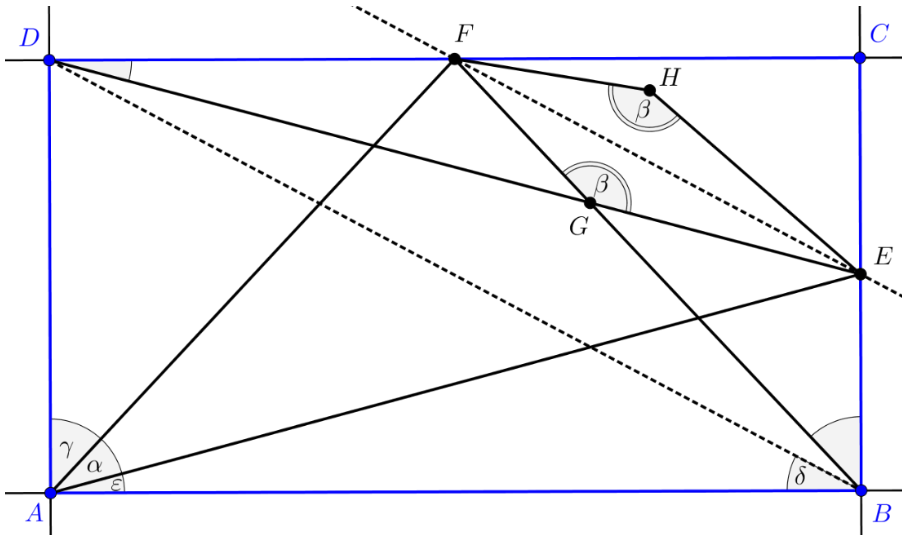
Öt személy esetén pedig az a) pontban már beláttuk, hogy a feltételek figyelembe vételével biztosan lesz olyan, a trónteremben tartózkodó személy, akinek a kezében legalább két kupa van. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
Ezzel a módszerrel belátható, hogy a feladat feltételei mellett bármely $2n + 1$ személy esetén (n pozitív egész) mindig van valaki, akinél legalább két kupa lesz az átadás után.

6. Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontja E, a CD oldal felezőpontja F. Legyen G a DE és BF szakaszok metszéspontja, G tükörképe az EF egyenesre legyen H. Bizonyítsa be, hogy az A, E, H, F pontok egy körre illeszkednek.

Megoldás: a feltételeknek megfelelő ábrát készítünk.



Az ábra jelöléseivel $FAE\sphericalangle = \alpha, FGE\sphericalangle = \beta, FAD\sphericalangle = \gamma, ABD\sphericalangle = \delta$ végül $BAE\sphericalangle = \varepsilon$.
Mivel $BAD\sphericalangle = 90°$, ezért

$$\alpha + \gamma + \varepsilon = 90°.$$ 1 pont

A tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt $FGE\sphericalangle = FHE\sphericalangle = \beta$. 1 pont

Azt fogjuk megmutatni, hogy az $AEHF$ négyszög két szemben levő szögének összegére

$$FAE\sphericalangle + FHE\sphericalangle = \alpha + \beta = 180°$$

teljesül. 1 pont

Az ADF és BCF háromszögekben a feltételek miatt $AD = BC$ és $DF = CF$, tehát két-két oldal hossza egyenlő, továbbá a megfelelő oldalak által bezárt szög mindkét háromszögben derékszög, ezért az ADF és BCF háromszögek egybevágók.

Ez azt is jelenti, hogy
(1) $$FAD\sphericalangle = FBC\sphericalangle = \gamma\,.$$ 1 pont

A megfelelő oldalak egyenlősége és a megfelelő oldalak által bezárt derékszögek miatt egybevágók az ABD és CDB háromszögek, illetve az ABE és DCE háromszögek. Egybevágó háromszögekben a megfelelő szögek egyenlők, ezért

(2) $$ABD\sphericalangle = CDB\sphericalangle = \delta\,,$$
valamint
(3) $$BAE\sphericalangle = CDE\sphericalangle = \varepsilon\,.$$ 1 pont

Az ábrán megrajzoltuk az $ABCD$ téglalap BD átlóját. A csúcsszögek egyenlősége miatt a BGD háromszögben

$$BGD\sphericalangle = \beta\,.$$ 1 pont

A szögekre vonatkozó (1)-(2)-(3) egyenlőségek segítségével kifejezhetjük BGD háromszög szögeit:

$$GDB\sphericalangle = \delta - \varepsilon\,,$$

illetve

$$GBD\sphericalangle = \alpha + \varepsilon - \delta\,.$$ 1 pont

Ugyanakkor a BGD háromszögben a belső szögek összege 180°, ezért a kapott összefüggéseket felhasználva

$$BGD\sphericalangle + GDB\sphericalangle + GBD\sphericalangle = 180°,$$

azaz

$$\beta + \delta - \varepsilon + \alpha + \varepsilon - \delta = 180°,$$

ebből azonnal adódik, hogy

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az $AEHF$ négyszög két szemben levő szögének összege 180°. 2 pont

A húrnégyszögek tételének megfordítása alapján ez azt jelenti, hogy az $AEHF$ négyszög húrnégyszög, csúcsai tehát valóban egy körre illeszkednek. 1* pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

a) A feltételeket figyelembe véve nyilvánvaló, hogy $\delta > \varepsilon$, vagyis $\delta - \varepsilon > 0$.

b) Az utolsó, 1*-gal jelzett pontot a versenyző nem kaphatja meg, ha a húrnégyszögek tételének megfordítása helyett a húrnégyszögek tételére hivatkozik.