



A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. A tízes számrendszerben felírt x pozitív egész szám számjegyeinek összege 7, a számjegyek szorzata 6, és az x szám osztható 16-tal. Határozza meg az összes ilyen számot.

Megoldás:

A feladat feltételei alapján a 6 olyan, tízes számrendszerbeli számjegyek szorzatára való felbontásait keressük, amelyben a számjegyek összege 7. 2 pont

Az egyik ilyen felbontás:

$$(1) \quad 6 = 1 \cdot 6.$$

Ebben a felbontásban a számjegyek szorzata 6, a számjegyek összege 7, ezért ebből a felbontásból két tízes számrendszerbeli számot kapunk, a 16-ot és a 61-et. 1 pont

A feladat harmadik feltételének, hogy a keresett x szám 16-tal osztható legyen, a két kapott szám közül csak az

$$x = 16$$

felel meg, ez a feladat egyik megoldása. 1 pont

A 6 szám egy másik lehetséges felbontása $6 = 2 \cdot 3$, ebben a felbontásban azonban a számjegyek összege nem 7, ezért a felbontást két 1-es szorzóval kell bővítenünk:

$$(2) \quad 6 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3. \quad 1 \text{ pont}$$

Ebből a felbontásból olyan négyjegyű számot kell előállítani, amelynek oszthatónak kell lenni 16-tal, ezért az utolsó két számjegyből álló szám a 12, vagy a 32. 1 pont

Ha az utolsó két számjegyből álló szám a 12, akkor az 1312 illetve 3112 számokat kapjuk, amelyek közül csak az 1312 osztható 16-tal, ezért az

$$x = 1312 = 16 \cdot 82$$

a feladat megoldása. 2 pont

Ha az utolsó két számjegyből álló szám a 32, akkor az 1132 négyjegyű számot kapjuk, amely azonban nem osztható 16-tal. 1 pont

A feladat mindegyik feltételének az $x = 16$ és az $x = 1312$ számok tesznek eleget, ezzel a feladat összes megoldását meghatároztuk. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Hányféle módon állítható elő a 2018 legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a $2018k$ darab egymást követő pozitív egész szám összegeként előállítható, ahol $k \geq 2$, és legyen az első szám a .

A k darab egymást követő pozitív egész szám egy $d = 1$ különbségű számtani sorozatot alkot.

1 pont

A számtani sorozat k -adik tagja $a_k = a + k - 1$.

1 pont

A számtani sorozat összegképletét alkalmazva

$$(1) \quad S_k = \frac{a + a + k - 1}{2} \cdot k = \frac{2a + k - 1}{2} \cdot k . \quad 2 \text{ pont}$$

A feladat feltétele szerint $S_k = 2018$, tehát az (1) egyenletből következően

$$(2) \quad (2a + k - 1) \cdot k = 4036 . \quad 1 \text{ pont}$$

A (2) egyenlet bal oldalán szereplő két pozitív egész szám paritása különböző, mert az összegük páratlan, valamint nyilvánvaló, hogy $2a + k - 1 > k$, ezért a szorzatuk csak kétféleképpen lehet

$$4036 = 2^2 \cdot 1009 ,$$

mégpedig

$$(3) \quad 2a + k - 1 = 4036 ; k = 1$$

és

$$(4) \quad 2a + k - 1 = 1009 ; k = 4 . \quad 2 \text{ pont}$$

A (3) egyenletrendszerből nem kapunk megoldást, hiszen a feladat feltétele szerint $k = 1$ nem lehetséges.

1 pont

A (4) egyenletrendszerben a $k = 4$ értékből egyszerű számolással azt kapjuk, hogy $a = 503$.

1 pont

Eszerint a 2018 csak egyféleképpen állítható elő legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként. Ebben az előállításban szereplő legkisebb összeadandó az $a = 503$, az összeadandók száma $k = 4$.

Számolással könnyen ellenőrizhető, hogy valóban

$$503 + 504 + 505 + 506 = 2018. \quad \underline{1 \text{ pont}}$$

Összesen: 10 pont

3. Egy ládában megromlott a benne levő almák egy része. Eltávolítunk 10 hibás almát, így annak a valószínűsége, hogy a maradékból véletlenszerűen kivéve egy almát, az hibás lesz, felére csökken az eredetihez képest. Ezután még 5 hibás almát kiveszünk. Ezzel annak a valószínűsége, hogy a maradékból véletlenszerűen egyet kivéve, a kivett alma hibás lesz, az egyötödére csökken az eredeti állapothoz képest. Hány jó alma volt a ládában?

Megoldás:

Legyen ládában levő összes almák száma n , a hibás almák száma kezdetben x , ekkor a hibás alma kivételének valószínűsége

$$(1) \quad P_1 = \frac{x}{n}. \quad 1 \text{ pont}$$

Ha kiveszünk a hibásak közül 10 almát, akkor a ládában levő összes almák száma $n - 10$, a hibás almák száma pedig $x - 10$ lesz, így a hibás alma választásának esélye:

$$(2) \quad P_2 = \frac{x - 10}{n - 10}. \quad 1 \text{ pont}$$

Ha ezután kiveszünk még 5 hibás almát, akkor a ládában levő almák száma $n - 15$, a hibás almák száma pedig $x - 15$.

Ez azt jelenti, hogy a ládában maradt almák közül egyet véletlenszerűen választva annak az esélye, hogy a kiválasztott alma hibás

$$(3) \quad P_3 = \frac{x - 15}{n - 15}. \quad 1 \text{ pont}$$

A feladat további két feltétele szerint

$$P_2 = \frac{1}{2} P_1; \quad P_3 = \frac{1}{5} P_1,$$

amelyből $2P_2 = P_1$, illetve $5P_3 = P_1$ következnek. 1 pont

Ebből pedig (1) és (2), valamint (1) és (3) alapján azt kapjuk, hogy:

$$(4) \quad \frac{2x - 20}{n - 10} = \frac{x}{n},$$

továbbá

$$(5) \quad \frac{5x - 75}{n - 15} = \frac{x}{n}. \quad 1 \text{ pont}$$

A (4) egyenletből a nevezőkkel beszorozva és rendezve

$$(6) \quad xn = 20n - 10x,$$

az (5) egyenletből pedig hasonlóan

$$(7) \quad 4xn = 75n - 15x. \quad 1 \text{ pont}$$

A (6) egyenlet mindkét oldalát 4-gyel szorozhatjuk, majd a kapott egyenlet és a (7) egyenlet jobb oldalait egyenlővé téve

$$80n - 40x = 75n - 15x,$$

innen pedig rendezés és egyszerűsítés után

$$n = 5x .$$

1 pont

A kapott összefüggést a (6) egyenletbe írva, a műveletek elvégzésével, rendezéssel és egyszerűsítéssel az

$$x^2 - 18x = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $x_1 = 0$ és $x_2 = 18$.

1 pont

Az $x_1 = 0$ a feladatnak nem megoldása, mert ellentmond a feladat szövegének. Ebből az következik, hogy csak $x = 18$ lehetséges.

A ládában levő jó almák száma eszerint 72.

1 pont

Kezdetben az összes almák száma 90, a hibás almák száma 18 volt, ezért a hibás alma kivételének valószínűsége

$$\frac{18}{90} = \frac{1}{5} .$$

10 hibás alma kivétele után a ládában összesen 80 alma maradt, ebből 8 hibás, vagyis a hibás alma kihúzásának esélye

$$\frac{8}{80} = \frac{1}{10} ,$$

az eredeti valószínűség felére csökkent.

Újabb 5 hibás alma kivételével a ládában maradt almák száma 75, ezek között 3 hibás maradt, tehát a hibás alma kivételének valószínűsége ekkor

$$\frac{3}{75} = \frac{1}{25} ,$$

ez pedig valóban ötödrésze a kiinduló esethez tartozó valószínűségnek.

1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A megoldás során a feladat szövegével összhangban feltettük, hogy az összes almák száma 15-nél több, vagyis $n \neq 0$; $n \neq 10$ valamint $n \neq 15$, így az (1)-(2)-(3) egyenletekben szereplő törtek mindegyike értelmezve van.

4. Az $ABCD$ húrnégyszög AC átlója a húrnégyszög körülírt körének átmérője. Bizonyítsa be, hogy a négyszög szemközti oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületei egyenlő hosszúak.

1.Megoldás:

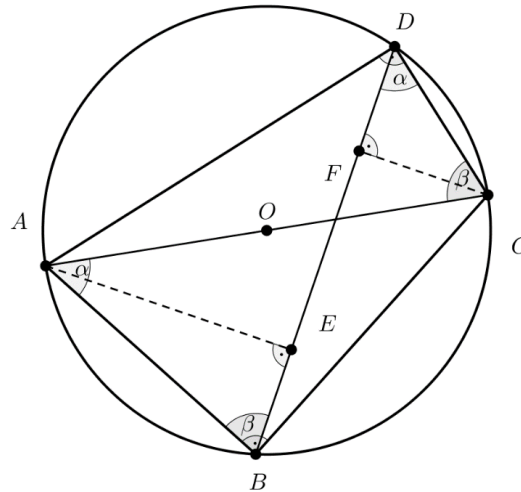
Az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének átmérője AC , a kör középpontja O . Thalész tétele értelmében $\angle ABC = 90^\circ$, és $\angle ADC = 90^\circ$.

Ugyanakkor a $\angle BAC = \alpha$ és $\angle DBA = \beta$ jelölésekkel a húrnégyszög körülírt körében a kerületi szögek tétele miatt

$$\angle BDC = \alpha; \angle DCA = \beta.$$

is fennáll (1. ábra).

2 pont



1. ábra

Az ACB derékszögű háromszögben $AB = AC \cdot \cos\alpha$, az ABE derékszögű háromszögben pedig $BE = AB \cdot \cos\beta$.

Ebből az következik, hogy

$$(1) \quad BE = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

2 pont

Hasonlóképpen az ACD derékszögű háromszögből a β hegyesszög koszinuszának definíciója alapján azt kapjuk, hogy $CD = AC \cdot \cos\beta$, a CDF derékszögű háromszögből pedig azt, hogy $DF = CD \cdot \cos\alpha$.

Ez azt jelenti, hogy

$$(2) \quad DF = AC \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha.$$

2 pont

Az (1) és (2) összefüggések szerint

$$(3) \quad BE = DF = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta,$$

tehát a húrnégyszög AB és CD oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületei egyenlő hosszúak.

1 pont

A BE és DF szakaszok hosszának egyenlőségéből $BF = DE$ is következik, hiszen az 1. ábra alapján világosan látszik, hogy $BF = BE + EF$, valamint $DE = DF + EF$.

2 pont

Az $ABCD$ húrnégyszög szemben levő $AB; CD$ illetve $AD; BC$ oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületeinek hossza tehát egyenlő, ez éppen a feladat állítása.

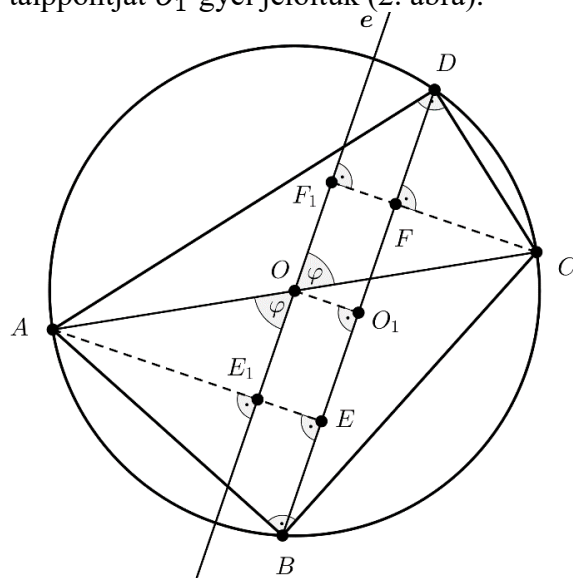
1 pont

Összesen: 10 pont

2.Megoldás:

Az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének O középpontján át megrajzoltuk a BD átlóval párhuzamos e egyenest, amelyet az $A; C$ pontokból a BD átlóra bocsátott merőlegesek rendre az $E_1; F_1$ pontokban metszik. Az O pontból a BD átlóra állított merőleges talppontját O_1 -gyel jelöltük (2. ábra).

2 pont



2. ábra

Az AOE_1 és COF_1 derékszögű háromszögek egybevágók, mert az $AOE_1 \sphericalangle$ és $COF_1 \sphericalangle$ hegyesszögek csúcshölk, továbbá nyilvánvaló, hogy $AO = CO$, ez két szakasz a kör egy-egy sugara.

2 pont

Az AOE_1 és COF_1 derékszögű háromszögek egybevágósága azt is jelenti, hogy $OE_1 = OF_1$, mivel pedig OO_1FF_1 , valamint OO_1EE_1 téglalapok, ezért

(1) $O_1E = O_1F$.

2 pont

Az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének O középpontjából a kör bármely húrjára bocsátott merőleges felezi a húr, ezért az O_1 pont a BD szakasz felezőpontja.

1 pont

Ebből pedig (1) alapján az következik, hogy

$$BE = O_1B - O_1E = O_1D - O_1F = DF,$$

azaz

(2) $BE = DF$.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$BF = O_1B + O_1F = O_1D + O_1E = DE,$$

vagyis

(3) $BF = DE$.

2 pont

A (2) és (3) összefüggések éppen azt jelentik, hogy a húrnégyszög szemközti oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületei egyenlő hosszúak.

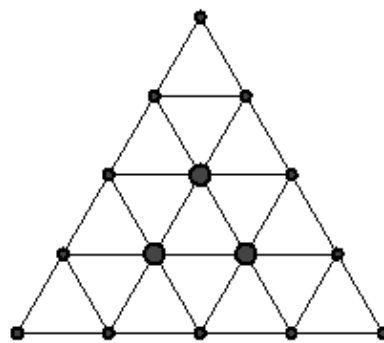
1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A feladat állítása könnyen igazolható arra a speciális esetre, amikor az AC átló mellett a BD átló is átmérője az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének.

5. A mellékelt ábra szerinti táblán korongokkal játszunk. Induláskor 3 korong van a táblán, a rajzon ezeket a nagyobb körök jelzik. Két pont szomszédos, ha él köti össze őket. A tábla szabad pontjaiba egyenként további korongokat akarunk helyezni úgy, hogy ha a feltett korongnak van közvetlen szomszédja (egy vagy több), akkor a szomszédok közül pontosan egyet kötelező levenni. A játék folyamán mennyi lehet a táblán lévő korongok



- minimális száma?
- maximális száma?
- Adjon meg egy eljárást a maximális érték eléréséhez.

Megoldás:

Ha egy korongot felteszünk a táblára, akkor, amennyiben a feltett korongnak van szomszédja, akkor egy korongot le kell vennünk, azaz a táblán levő korongok száma nem változik. Ha a feltett korongnak nincs szomszédja, akkor a szabályok szerint a táblán marad, vagyis a táblán levő korongok számát növeltük. 1 pont

Ebből azonnal következik, hogy a táblán levő korongok minimális száma 3. 1 pont

A korongok számának maximális értéke nem lehet 14.

Ugyanis a táblán levő 15 pont mindegyike olyan tulajdonságú, hogy van legalább két szomszédja. 1 pont

Ezért, ha feltételezzük, hogy a táblára már 13 korong fölkerült, akkor pontosan két helyen nincs még korong, ezek bármelyikére a 14. korongot föltéve, annak legalább egy szomszédja lesz a táblán levő korongok közül, vagyis a játékszabály szerint egy korongot le kell venni. 1 pont

Ebből azonnal adódik, hogy a táblára helyezhető korongok maximális száma 15 sem lehet. 1 pont

Így legfeljebb 13 korong lehet egyszerre a táblán.

Megmutatjuk, hogy 13 korong a játékszabály betartása mellett valóban elhelyezhető a táblán.

A tábla alsó vízszintes sorának 5 pontját balról indulva betűzzük meg, a pontok jele $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$. A tábla következő sorának pontjai $B_1; B_2; B_3; B_4$, a harmadik sor pontjai $C_1; C_2; C_3$, a negyedik sorban vannak a $D_1; D_2$ pontok, végül az ötödik sor egyetlen pontja E_1 .

A játék indítása előtt a táblán a $B_2; B_3; C_2$ pontokban van korong, ezeket előbb fokozatosan leszedjük, közben az $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ sort több lépésben feltöltjük korongokkal. 1* pont

Tegyünk a B_1 pontba egy korongot és a játékszabály szerint vegyük le a B_2 pontban fent levőt.

Ezután tegyünk egy korongot az A_1 pontba és vegyük le a B_1 pontba előzőleg tett korongot. Az A_1 pontba helyezett korongot a továbbiakban már nem mozdítjuk el.

A következő lépéssorozattal pedig korongot helyezünk az A_2 pontba: korongot teszünk B_2 -re és levesszük B_3 -at, majd A_2 -re teszünk korongot és a játékszabályt betartva levesszük a B_2 pontbeli korongot. Ezután az A_2 pontbeli korong már nem mozdul el.
 Ezután a B_3 pontba téve korongot, levesszük C_2 -t, hiszen ezek szomszédok, majd az A_3 pontba korongot teszünk, levesszük B_3 -at és A_3 -at a továbbiakban nem mozgatójuk.
 Mivel a B_4 pontnak ebben a helyzetben nincs szomszédja, ezért oda más korong levétele nélkül egy korongot tehetünk, majd A_4 -be korongot téve levesszük az imént föltett B_4 korongot. Az A_4 pontbeli korong innen már nem mozdul.

Az eddigi állást tekintve C_3 -nak nincs szomszédja, oda tehát egyéb korong levétele nélkül helyezünk egy korongot, majd visszateszünk B_4 -be egyet és levesszük a C_3 korongot. Végül az A_5 pontba korongot teszünk, és egyúttal levesszük B_4 -et.

Ezzel elértük azt, hogy a táblán csak az A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_5 pontokban vannak korongok.

2* pont

Az eddigihez teljesen hasonlóan tölthetők fel korongokkal a B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4 pontok a felettük levő C_1 ; C_2 ; C_3 pontok felhasználásával, illetve a C_1 ; C_2 ; C_3 pontok a felettük levő D_1 ; D_2 és E_1 pontok segítségével.

1* pont

Ha ezt a feltöltést befejeztük, akkor a táblán pontosan 12 ponton áll korong. Helyezzünk el ezután az E_1 pontba egy korongot, az ezzel szomszédos D_1 ; D_2 pontokban nincs korong, tehát nem kell levennünk egy korongot sem. Az eljárás segítségével tehát valóban sikerült a táblára 13 korongot tennünk.

1* pont

Összesen: 10 pont

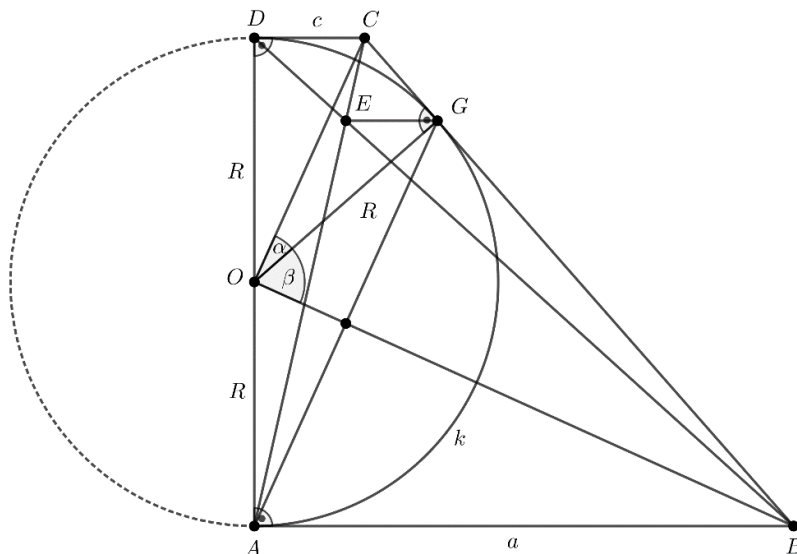
Megjegyzés:

A *-gal jelzett pontokat a versenyző bármely más, pontosan leírt, helyes eljárás esetén megkapja.

6. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD , amelyekre $AB > CD$, továbbá teljesül, hogy a trapéz AD szára merőleges AB -re. Az AD szár, mint átmérő fölé szerkesztett kör a BC szarat érinti. Jelöljük a trapéz átlóinak metszéspontját E -vel és húzzunk az E ponton át párhuzamos az AB oldallal, ez az egyenes a BC szarat az F pontban metszi. Az AD szár felezőpontját O -val jelöljük. Bizonyítsa be, hogy $AF \parallel OC$ és $OF \perp BC$.

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk, amelyen az AD átmérőjű, O középpontú, R sugarú k kör és a trapéz BC szarának érintési pontját G -vel jelöltük (3. ábra).



3. ábra

Megmutatjuk, hogy a feladatban szereplő F pont és a G érintési pont azonos.

A k körhöz a $B; C$ pontokból húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért az $AB = a; CD = c$ jelöléssel

$$(1) \quad BG = a; CG = c. \quad 1 \text{ pont}$$

A trapéz AB és CD alapjának párhuzamossága miatt az ABE és CDE háromszögek megfelelő szögei egyenlők, ez a két háromszög tehát hasonló. Megfelelő oldalaik aránya

$$(2) \quad \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{c}{a}. \quad 1 \text{ pont}$$

Az $ACB \sphericalangle CA$ és CB szarain szereplő szakaszokra (1) és (2) alapján felírhatjuk, hogy

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CG}{BG} = \frac{c}{a}. \quad 1 \text{ pont}$$

Ebből a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt azt kapjuk, hogy $EG \parallel AB$, ez pedig feltételek alapján azt jelenti, hogy $EF = EG$.

Ezért az F és G pontok valóban azonosak.

Ezzel igazoltuk a feladatnak azt az állítását, hogy $OF \perp BC$, hiszen

$OF = OG = R$ a k kör sugara, $CF = CG$ a k kör érintője. 2* pont

Az $ABFO$ négyszögben tehát $AB = AF = a$ és $OA = OF = R$, tehát a négyszög deltoid. Hasonlóan beláthatjuk, hogy a $DCFO$ négyszög is deltoid.

A két deltoidban az $OB; OC$ átlók rendre felezik $\angle AOF = \alpha; \angle DOF = \beta$ szögeket, ezért az ábra jelöléseivel

$$(3) \quad \alpha + \beta = 90^\circ. \quad 2 \text{ pont}$$

A (3) összefüggés azt is jelenti, hogy $OC \perp OB$. 1 pont

Ugyanakkor $AF \perp OB$ is igaz, mivel az $ABFO$ deltoid átlói merőlegesek egymásra.

Tehát az AF és OC szakaszok ugyanarra az OB szakaszra merőlegesek, ezért párhuzamosaknak kell lenniük egymással, ezzel a feladat $AF \parallel OC$ állítását is bizonyítottuk. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A 2* pontot a versenyző nem kaphatja meg, ha a párhuzamos szelők tételének megfordítása helyett a párhuzamos szelők tételére hivatkozik.