



A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$12 \cdot \sin^2 x + 7 \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \sin^2(2x) + 12$$

egyenletet.

Megoldás:

Mivel

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

ezért $\sin x \neq 0$, amely alapján $x \neq k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$).

1 pont

Rendezzük 0-ra az egyenletet:

$$\sin^2(2x) + 12 - 12 \cdot \sin^2 x - 7 \cdot \operatorname{ctg}^2 x = 0.$$

Felhasználjuk a $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ trigonometriai azonosságot, ezzel:

$$4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 12 - 12 \cdot \sin^2 x - 7 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 0,$$

1 pont

továbbá $12 - 12 \cdot \sin^2 x = 12 \cdot (1 - \sin^2 x) = 12 \cdot \cos^2 x$ alapján

$$4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 12 \cdot \cos^2 x - 7 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 0.$$

1 pont

A $\cos^2 x$ tényező kiemelése után azt kapjuk, hogy:

$$\cos^2 x \cdot \left(4 \cdot \sin^2 x + 12 - \frac{7}{\sin^2 x} \right) = 0.$$

1 pont

Mivel egy szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, ezért

(1) $\cos^2 x = 0$

vagy

(2) $4 \cdot \sin^2 x + 12 - \frac{7}{\sin^2 x} = 0.$ 1 pont

Az (1) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

amely eleget tesz a feltételnek.

1 pont

A (2) egyenletből a $c = \sin^2 x$ helyettesítéssel és rendezéssel egy másodfokú egyenletet kapunk:

(3) $4c^2 + 12c - 7 = 0.$ 1 pont

A (3) egyenlet gyökei

$$c_1 = -\frac{7}{2}; c_2 = \frac{1}{2},$$

amelyek közül a

$$c_1 = -\frac{7}{2}$$

a $\sin x \neq 0$ feltétel miatt nyilvánvaló $c > 0$ miatt nem ad megoldást.

1 pont

A c_2 értékét visszahelyettesítve a $c = \sin^2 x$ kifejezésbe, a

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

egyenletet kapjuk, amelynek megoldása

$$x = \frac{\pi}{4} + m \cdot \frac{\pi}{2}; (m \in \mathbb{Z}).$$

Ez a megoldás szintén eleget tesz a feltételeknek.

1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, a kapott számok mindegyike megfelel a feltételeknek, ezért a feladat megoldásai az

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi; x_2 = \frac{\pi}{4} + m \cdot \frac{\pi}{2}; (k; m \in \mathbb{Z})$$

valós számok.

1 pont

Összesen: 10 pont

2. Aladár matematika év végi osztályzata az elmúlt tanévben 4-es lett. Elgondolkodott a nyár folyamán: „Ha az utolsó két 1-es dolgozatomat 5-ösre írtam volna, akkor az év végi jegyem 5-ös lett volna. Viszont, ha mindkét évközi szóbeli feleletem egy jeggyel gyengébb lett volna, akkor 4-es helyett csak 3-ast kaptam volna év végén.” Legfeljebb hány ötöse lehetett Aladárnak az elmúlt tanévben matematikából?
(Az év végi jegy úgy számítandó, hogy ha a jegyek \bar{x} átlagára $2,5 \leq \bar{x} < 3,5$ teljesül, akkor az év végi jegy 3-as, ha $\bar{x} \geq 4,5$, akkor pedig 5-ös.)

Megoldás:

Legyen Aladár múlt évi jegyeinek összege S , a jegyek darabszáma n .

Ezzel a jelöléssel Aladár matematika átlaga az elmúlt tanévben

$$\bar{x} = \frac{S}{n}.$$

Mivel Aladár 4-es osztályzatot kapott, ezért

$$(1) \quad 3,5 \leq \frac{S}{n} < 4,5.$$

Ha az utolsó két 1-es dolgozatát 5-ösre írta volna, akkor a jegyeinek összege $S + 8$, év végi jegye pedig 5-ös lett volna, tehát

$$(2) \quad 4,5 \leq \frac{S + 8}{n}. \quad 1 \text{ pont}$$

Ha viszont a feleletei egy jeggyel gyengébbek lettek volna, akkor a jegyeinek összege 2-vel csökken, és év végén 3-ast kapott volna, ezért

$$(3) \quad 2,5 \leq \frac{S - 2}{n} < 3,5. \quad 1 \text{ pont}$$

A (2) és (3) feltételeket felhasználva fennáll, hogy

$$4,5 \cdot n - 8 \leq S < 3,5 \cdot n + 2,$$

amelyből $n < 10$ következik. 1 pont

Mivel a maximális számú 5-öst kell meghatározni, ezért először $n = 9$ -re keresünk megoldást. 2 pont

Ha $n = 9$, akkor

$$4,5 \cdot 9 - 8 \leq S < 3,5 \cdot 9 + 2,$$

$$32,5 \leq S < 33,5.$$

azaz a jegyek összege 33. 1 pont

Ekkor maximálisan 6 darab 5-öse lehetett Aladárnak, és a maradék három jegye 1-es kellett, hogy legyen. 1 pont

Számolással ellenőrizve $n = 9$ és $S = 33$ esetén Aladár átlaga

$$\frac{33}{9} = 3,6$$

tehát valóban 4-es az év végi jegye, illetve ha két 1-es helyett két 5-öst kapott volna, akkor az átlaga

$$\frac{41}{9} = 4,5$$

lett volna, ami 5-ös év végi jegynek felel meg.

Ha két 5-ös helyett két 4-est kapott volna, akkor az átlaga

$$\frac{31}{9} = 3,4,$$

ami valóban 3-as év végi jegyet jelentett volna.

1 pont

Aladár minden jegye nem lehetett 5-ös, hiszen akkor az év végi jegye nem 4-es lett volna.

Ezért $n = 7$ esetben 6-nál több 5-ös jegye nem lehetett matematikából.

Az $n = 8$ esetet tekintve pedig az 5-ösök száma legfeljebb 7 lehetett volna, de ekkor a nyolcadik jegy legkisebb lehetséges értékét véve is azt kapnánk, hogy a jegyek összege $S = 36$, és így

$$\bar{x} = \frac{36}{8} = 4,5,$$

ami a feltételnek ellentmondó 5-ös év végi jegyet eredményezett volna.

Ezért 9-nél kevesebb jegyből 6-nál több 5-öst a feladat feltételei mellett nem lehet szerezni, tehát az 5-ösök maximális száma 6.

2 pont

Összesen: 10 pont

3. Bizonyítsa be, hogy az

$$\frac{1}{216} + \frac{1}{217} + \frac{1}{218} + \dots + \frac{1}{2019}$$

kifejezés értéke nem lehet egész szám.

1. megoldás:

A 216; 217; ...; 2019 számok között a legnagyobb kettőhatvány a

$$2^{10} = 1024. \quad 3 \text{ pont}$$

Ezért, ha a kifejezésben szereplő törteket közös nevezőre hozzuk, akkor a nevező osztható lesz 1024-gyel. 2 pont

Emiatt minden törtet bővíteni kell 2-nek valamelyik pozitív kitevőjű hatványával kivéve az

$$\frac{1}{1024}$$

törtet. 1 pont

Minden további bővítés páratlan számmal történik, vagyis az

$$\frac{1}{1024}$$

tört bővített alakjának számlálója páratlan szám. 1 pont

A bővítések elvégzése után a számlálóban 1803 darab páros szám és egy páratlan szám összege szerepel, vagyis a számláló páratlan szám. 1 pont

Mivel így a nevező osztható 1024-gyel, a számláló pedig nem, ezért az összeg nem lehet egész szám. 2 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

A 216; 217; ...; 2019 számok közül válasszunk ki egy olyan prímszámot, amelynek egyetlen többszöröse sem szerepel a számok között. Legyen ez például a 2017. 3 pont

Ha fenti törteket közös nevezőre hozzuk, akkor a nevező osztható lesz 2017-tel. 2 pont

Ekkor minden további törtet bővíteni kell 2017-tel, kivéve az

$$\frac{1}{2017}$$

törtet. 2 pont

Ekkor a számláló minden tagja, egyet kivéve osztható 2017-tel, ezért a számlálóban levő összeg nem lesz osztható 2017-tel, a nevező pedig igen. 1 pont

Vagyis a számláló nem lesz többszöröse a nevezőnek, tehát a kifejezés valóban nem lehet egész szám. 2 pont

Összesen: 10 pont

4. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_x 2}}} = \log_{4x}(9x - 1).$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt $9x - 1 > 0$; $4x > 0$; $4x \neq 1$; $x > 0$; $x \neq 1$, továbbá az egyenlet bal oldalán szereplő törtek miatt

$$\frac{1}{\log_x 2} \neq -1; \quad 1 + \frac{1}{\log_x 2} \neq -1; \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_x 2}} \neq -1$$

ahonnan egyszerű számolással kapjuk, hogy az egyenlet az

$$x > \frac{1}{9}; \quad x \neq \frac{1}{4}; \quad x \neq \frac{1}{2}; \quad x \neq 1$$

összefüggéseknek megfelelő valós számokra értelmezhető.

1 pont

Használjuk fel, az

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

azonosságot, eszerint

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_x 2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \log_2 x}}.$$

1 pont

Alkalmazzuk az $1 + \log_a b = \log_a a + \log_a b = \log_a(ab)$ átalakítást, ezzel

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \log_2 x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_2(2x)}}.$$

1 pont

A fenti átalakításokat többször elvégezve:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_2(2x)}} &= 1 + \frac{1}{1 + \log_{2x} 2} = 1 + \frac{1}{\log_{2x}(4x)} = 1 + \log_{4x}(2x) = \\ &= \log_{4x}(8x^2). \end{aligned}$$

2 pont

Az eredeti egyenlet bal oldalának átalakítása után kapott egyenlet:

$$(1) \quad \log_{4x}(8x^2) = \log_{4x}(9x - 1).$$

1 pont

A logaritmus definíciója szerint

$$(4x)^{\log_{4x}(8x^2)} = 8x^2; \quad (4x)^{\log_{4x}(9x-1)} = 9x - 1,$$

ezért $8x^2 = 9x - 1$, amelyből a

$$(2) \quad 8x^2 - 9x + 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

2 pont

A (2) egyenlet megoldásai

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{8}$$

amelyek közül $x_1 = 1$ nem tesz eleget a kezdeti feltételeknek, ezért nem megoldása a feladatnak.

1 pont

Az

$$x_2 = \frac{1}{8}$$

megfelel minden feltételnek és számolással ellenőrizhető, hogy valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

1 pont

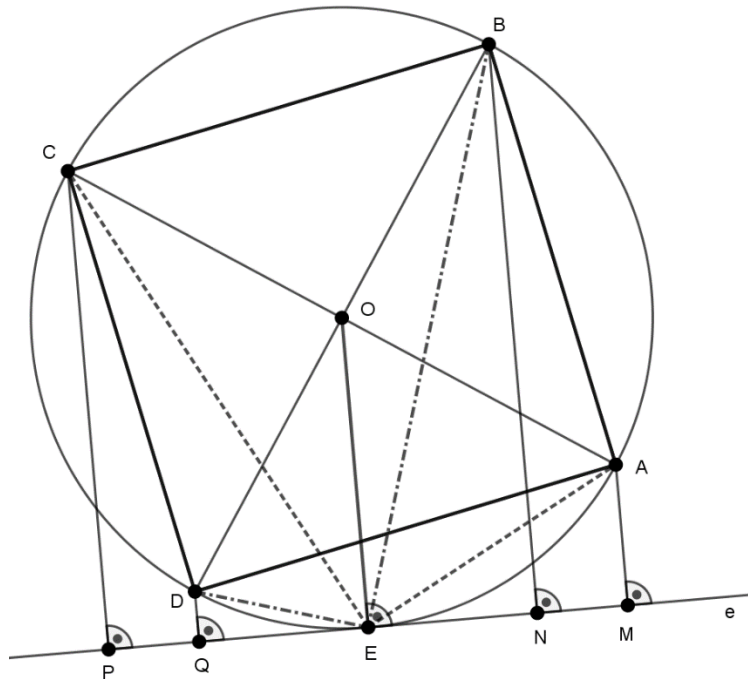
Összesen: 10 pont

5. Az $ABCD$ négyzet körülírt körének tetszőleges pontjában húzzunk érintőt a körhöz. Vetítsük merőlegesen a négyzet A, B, C, D csúcsait erre az érintőre. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre M, N, P, Q .

Mutassa meg, hogy az $AM \cdot CP + BN \cdot DQ$ szorzatösszeg éppen a négyzet területének a felével egyenlő.

Megoldás:

Készítsünk ábrát a feladathoz, amelyen a négyzet körülírt körének középpontját O -val, a körülírt körhöz az E pontban húzott érintőt e -vel jelöltük.



1. ábra

Tekintsük először az $AMPC$ derékszögű trapézt.

Ebben az OE szakasz a trapéz középvonala, hiszen az érintési pontból húzott sugár merőleges az érintőre, tehát $OE \parallel AM \parallel CP$, és O pont az AC átló felezőpontja.

Ezért az $EM = x$ jelöléssel $EM = EP = x$.

1 pont

A Thalész-tétel miatt az AEC derékszög, így az AEM és az ECP derékszögű háromszögek E -nél található szögei pótszögek, tehát a háromszögek hasonlóak.

1 pont

Ebből a megfelelő oldalak aránya

$$\frac{AM}{x} = \frac{x}{CP},$$

amelyből átrendezés után az

$$AM \cdot CP = x^2$$

összefüggést kapjuk.

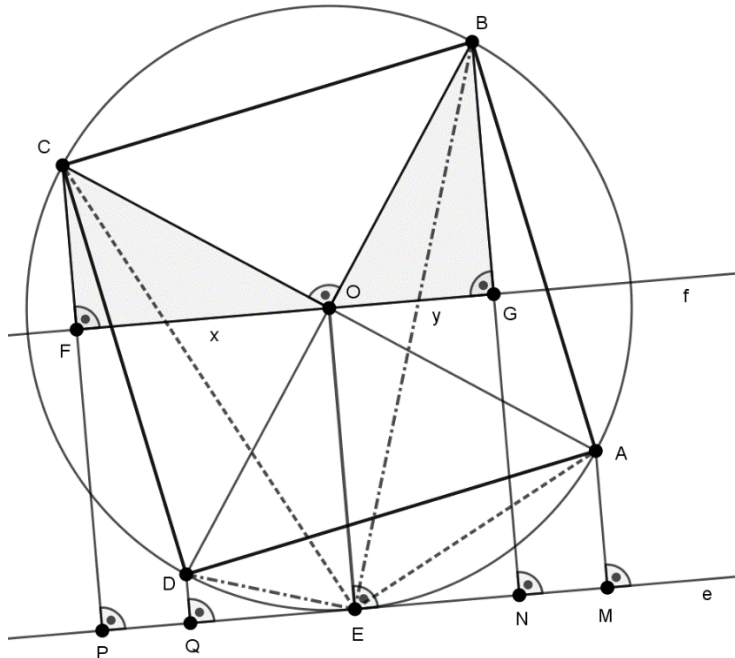
2 pont

Ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk a $BNQD$ derékszögű trapézról, hogy az $EN = y$ jelöléssel $EN = EQ = y$, továbbá a BEN és az EDQ derékszögű háromszögek hasonlóságából következően

$$BN \cdot DQ = y^2.$$

2 pont

Tekintsük a 2. ábrát, amelyen az O ponton át párhuzamost húztunk az e egyenessel.



2. ábra

Ekkor $OF = EP = x$ és $OG = EN = y$, illetve $OC = OB = R$ a kör sugara, és BOC derékszög.

1 pont

A BOG és OCF derékszögű háromszögek BOG és COF szögei pótszögek, így a két derékszögű háromszög egybevágó, és ezért $BG = x$ illetve $CF = y$.

1 pont

Ebből következik, hogy

$$R^2 = x^2 + y^2.$$

1 pont

Ismeretes, hogy a kör sugarának négyzete éppen fele a négyzet területének, így a négyzet területét T -vel jelölve

$$\frac{1}{2}T = R^2 = x^2 + y^2 = AM \cdot CP + BN \cdot DQ.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzés:

A feladat állítása akkor is teljesül, ha az e egyenes az $ABCD$ négyzet körülírt körét a négyzet valamelyik csúcsában érinti. Ha ez a csúcs például az A pont, akkor $A = M = P$, ezért $AM = 0$.

Ugyanakkor $BN = DQ = R$, és így

$$AM \cdot CP + BN \cdot DQ = R^2.$$

