A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Határozza meg az $a;\ b;\ c;\ d$ pozitív prímszámokat, ha tudjuk, hogy a

$$lga + lgb + lgc + lgd \text{ és a } 2a^b + c^d$$

kifejezések értéke (nem feltétlenül azonos) pozitív prímszám.

Megoldás:
Az $a; b; c; d$ számok pozitív prímek, ezért a $lga;\ lgb;\ lgc;\ lgd$ számok mindegyike pozitív szám.
Legyen

(1) $$lga + lgb + lgc + lgd = p\ ,$$

ahol a feltétel szerint p pozitív prím.
A logaritmus azonosságának alkalmazásával (1) így is írható:

$$lg(abcd) = p\ .$$ 1 pont

Ebből a logaritmus definíciója segítségével azt kapjuk, hogy

(2) $$10^p = abcd\ .$$ 1 pont

Mivel $10 = 2 \cdot 5$, ezért a (2) egyenlet bal oldala $2^p \cdot 5^p$ alakban is írható, emiatt $2^p \cdot 5^p$ szorzatalakjában csak a 2-es és 5-ös prímtényezők szerepelhetnek, továbbá a nyilvánvaló $p \geq 2$ feltétel miatt mindkettőből legalább kettő. 2 pont

Ezért (2) jobb oldalán is csak a 2-es és 5-ös prímtényezők állhatnak, másrészt mivel a jobb oldal pontosan 4 darab prím szorzata, így az $a;\ b;\ c;\ d$ számok között pontosan két darab 2-es és két darab 5-ös szerepel. 1 pont

Eszerint az $a;\ b;\ c;\ d$ prímek mindegyikét a $\{2; 5\}$ halmazból választhatjuk az előző megállapítás figyelembevételével.

Vizsgáljuk meg most, hogy a $2a^b + c^d$ kifejezés milyen $a;\ b;\ c;\ d$ értékekre ad prímszámot.

A c értéke nem lehet 2, mert $c = 2$ mellett a $2a^b + c^d$ összeg kettőnél nagyobb páros szám lenne, vagyis nem lehetne prím. Emiatt szükségképpen $c = 5$. 1 pont

A $d = 5$ és $a = b = 2$ választással $2a^b + c^d = 2 \cdot 2^2 + 5^5 = 3133$, de $3133 = 13 \cdot 241$, tehát 3133 nem prímszám. 1 pont

Ha $d = 2$ és $a = 5$, akkor $b = 2$, és így $c = 5$ mellett $2a^b + c^d = 2 \cdot 5^2 + 5^2 = 75$. Ez 5-tel osztható, tehát nem prímszám. 1 pont

Végül, ha $d = 2$ és $a = 2$, akkor csak $b = 5$ lehetséges, így felhasználva a $c = 5$ értéket, azt kapjuk, hogy $2a^b + c^d = 2 \cdot 2^5 + 5^2 = 89$ prímszám. 1 pont

Mivel más eset nem fordulhat elő, ezért az $a; b; c; d$ pozitív prímszámok értéke csak $a = 2,\ b = 5,\ c = 5$ és $d = 2$ lehet, ez a feladat egyetlen megoldása. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Adja meg az $x; y$ valós számokat úgy, hogy a

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}$$

kifejezés értéke a lehető legkisebb legyen. Határozza meg a kifejezés legkisebb értékét.

Megoldás:
A megadott kifejezést jelöljük K-val.
A K kifejezés átalakítható a következőképpen:

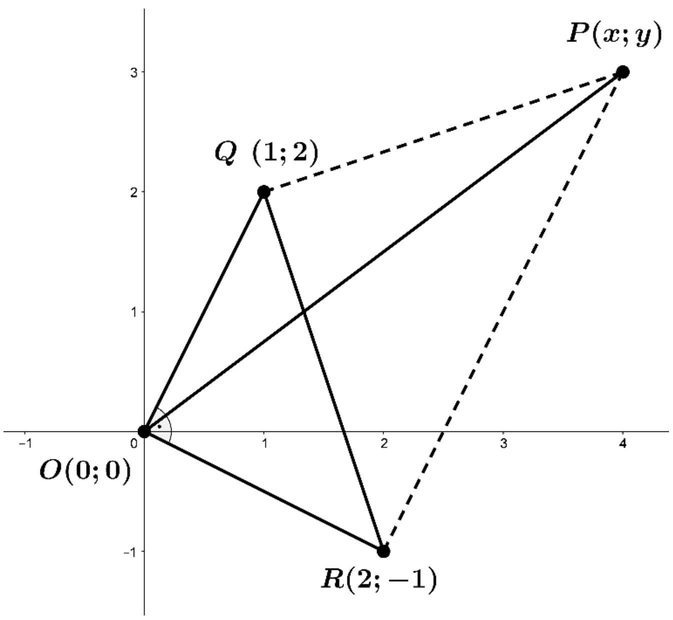
(1) $$K=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\,.$$ 1 pont

Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(x; y)$, a $Q(1; 2)$ illetve $R(2; -1)$ pontokat.

Ezzel (1) szerint
(2) $$K=PQ+PR\,,$$

tehát a feladat azon $(x; y)$ számpárok meghatározása, amelyek mellett a $PQ+PR$ távolságösszeg minimális. 1 pont

Megállapításainknak megfelelő vázlatos ábrát készítünk.



A $K=PQ+PR$ távolságösszeg pontosan akkor lesz a legkisebb, ha a P pont a QR szakaszon helyezkedik el. 3 pont

A QR egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{RQ}(-1; 3)$ vektor, ezért az egyenes egyenlete:

$$3x+y=5\,.$$ 1 pont

A P pont akkor esik egybe a QR szakasz valamelyik pontjával, ha $(x; y)$ koordinátái teljesítik a

$$1 \leq x \leq 2; \qquad -1 \leq y \leq 2; \qquad 3x + y = 5$$

feltételek mindegyikét. 2 pont

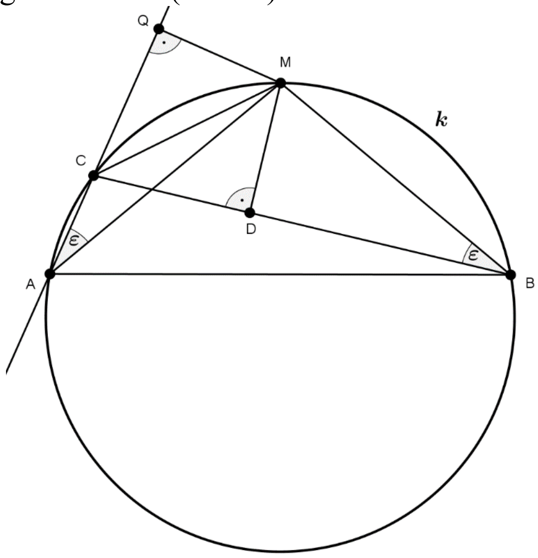
Ebben az esetben a $K = PQ + PR$ minimális távolságösszeg a QR szakasz hosszával egyezik meg, azaz

$$K_{min} = \sqrt{10}\,.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

3. A k kör A és B pontjai közé eső egyik körív felezőpontja legyen M.
A B pontot nem tartalmazó MA köríven jelöljünk ki egy C pontot és legyen az M pontból a BC húrra állított merőleges talppontja D.
Igazolja, hogy
$$BD = AC + CD.$$

1. Megoldás:
Készítünk a feltételeknek megfelelő ábrát (1. ábra).



1. ábra

Az ábrán merőlegest bocsátottunk az M pontból az AC egyenesre, a merőleges talppontját Q-val jelöltük. 1 pont

A kerületi szögek tétele miatt $CAM\sphericalangle = CBM\sphericalangle$, ezeket az egyenlő nagyságú szögeket az ábrán ε-nal jelöltük. 1 pont

Mivel az M pont az AB ív felezőpontja, ezért $MA = MB$. 1 pont

A BMD és AMQ derékszögű háromszögekben $QAM\sphericalangle = DBM\sphericalangle = \varepsilon$, ezért a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, és $MA = MB$ miatt két megfelelő oldal hossza is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó. 2 pont

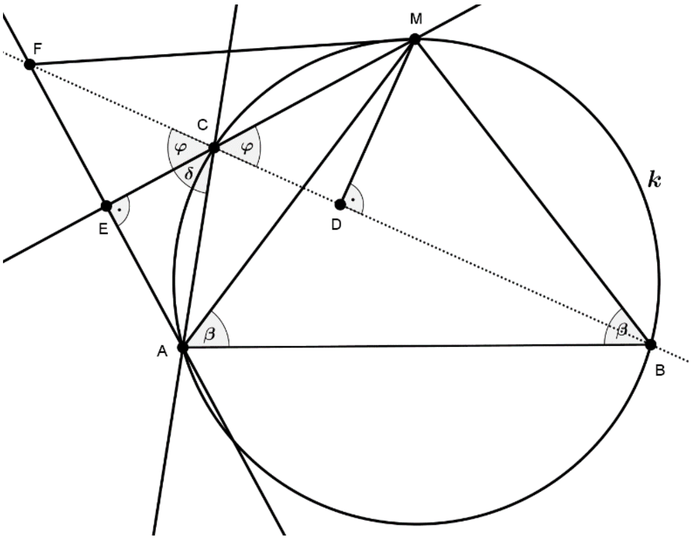
Az egybevágóságból következik, hogy $BD = AQ$ és $MD = MQ$. 1 pont

Ebből az is következik, hogy a CMD és CMQ derékszögű háromszögek is egybevágók, hiszen a háromszögekben két-két oldal hossza és az ezek közül a közös hosszabb oldallal szemközti derékszögek egyenlő nagyságúak. 2 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy $CQ = CD$, innen pedig $AQ = AC + CQ = AC + CD$.
Mivel a fentiek szerint $BD = AQ$, ezért
$$BD = AC + CD,$$
és éppen ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás: Jelöléseink a 2. ábrán láthatók.



2. ábra

Az ábrán merőlegest bocsátottunk az A pontból az MC egyenesre, a merőleges talppontja E, a merőleges a BC egyenesét az F pontban metszi. 1 pont

Nyilvánvaló, hogy

$$BAM\sphericalangle = ABM\sphericalangle = \beta,$$

hiszen az ABM háromszög egyenlő szárú, mivel az M pont felezi az AB ívet. 1 pont

Az $ABMC$ négyszög a k körbe írt húrnégyszög, ezért $ACM\sphericalangle = 180° - \beta$, így

$$ACE\sphericalangle = \delta = \beta.$$

$BCM\sphericalangle = FCE\sphericalangle = \varphi$, mivel csúcsszögek. Ugyanakkor a kerületi szögek tétele miatt a k körben $BCM\sphericalangle = BAM\sphericalangle$, vagyis az ábra jelöléseivel

(1) $$\varphi = \beta = \delta.$$ 2 pont

(1) szerint az ACF háromszögben az AF szakaszra merőleges CE egyenes az $ACF\sphericalangle$ szögfelezője, vagyis az ACF háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Ez azt is jelenti, hogy a CE egyenes az AF szakasz felezőmerőlegese, és ezért

(2) $$MA = MF.$$ 1 pont

Tudjuk, hogy $MA = MB$, így (2) szerint $MB = MF$ is igaz, tehát a BFM háromszög egyenlő szárú, amelyben a BF alap felezőmerőlegese éppen az MD egyenes.

Ebből azonnal adódik, hogy

(3) $$BD = FD.$$ 2 pont

Ugyanakkor $FD = FC + CD$, valamint $FC = AC$, hiszen az ACF háromszög egyenlő szárú. Ez pedig (2) alapján ekvivalens azzal, hogy

$$BD = AC + CD,$$

ami a bizonyítandó volt. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

a) Az M középpontú MA sugarú körvonal tartalmazza az $A; B; F$ pontokat.
b) Könnyen belátható, hogy mindkét megoldásban leírtak érvényesek arra az esetre is, ha az M pontot az 1. és 2. ábra szerinti hosszabbik AB íven jelöljük ki.