



A 2019/2020. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
első forduló

## MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, szakközépiskola)

### FELADATLAP

- Adja meg a valós számok halmazán értelmezett összes olyan  $f(x) = ax + b$  függvényt, amelyre az  $a \neq 0$  feltétel mellett teljesül, hogy  $f(a) = (a - b)^2$  és  $f(b) = 2a + b$ .
- Egy téglalap alakú papírlap oldalai 2019 és 2020 egység hosszúak. Mekkora az egyik átló mentén történő összehajtással keletkező síkidom területe?
- Legyenek azok a pozitív egész számok „unalmasak”, amelyeknek a tízes számrendszerbeli alakja legalább kétjegyű, és a számjegyei szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő sorrendben követik egymást.
  - Hány háromjegyű, csupa páratlan számjegyekből álló „unalmas” szám van?
  - Számolja ki az ötjegyű „unalmas” számok összegét.
- Az  $ABCD$  konvex négyszögben  $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DAC = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle ADC = 90^\circ$  és az  $AC$  átló merőleges az  $AB$  oldalra. Legyenek az  $AB$ ;  $BC$ ;  $CD$ ;  $DA$  oldalak felezőpontjai rendre  $E$ ;  $F$ ;  $G$ ;  $H$ . Határozza meg az  $EFGH$  négyszög oldalainak hosszát és területét, ha a  $BC$  oldal hossza  $2\sqrt{7}$  cm.
- Oldja meg a valós számhármasok halmazán az

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} = 15; \quad 2x + 3y = 13$$

egyenletrendszerét.

- Egy dobókocka lapjai 1-től 6-ig vannak számozva. Egy bolha a dobókocka 1-es számú lapján pihen. A bolha egy ugrással kizárólag a szomszédos lapok valamelyikére tud ugrani, és azok közül bármelyikre egyforma valószínűséggel. Onnan ismét egy vele szomszédos lapra ugorhat. Mennyi a valószínűsége, hogy öt ugrás után a bolha a kiinduló 1-es számú lapra érkezik vissza?

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.