OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. András, Béla és Csaba beszélgetnek. Andrásnak és Bélának néhány hete volt a születésnapja. Csaba tudni szeretné, hányadik születésnapjuk volt:

   Csaba: Hány évesek vagytok?
   András: Életkoraink összege 90 év.
   Csaba: Ebből még nem tudom megállapítani.
   Béla: Mindkettőnk életkora prímszám.
   Csaba: Ebből még mindig nem tudom megállapítani.
   András: Életkoraink különbsége négyzetszám.
   Csaba: Még ebből sem tudom megállapítani.
   Béla: Az életkorainkat leíró számok számjegyei között van összetett szám is.
   Csaba: Most már tudom az életkoraitokat.
   András: Ha tényleg tudod, akkor írd le az életkoraink szorzatát erre a papírra!

   Ezután Csaba helyesen leírta az életkorok szorzatát. Mit írt a papírra, és miért?

Megoldás:

Megvizsgáljuk sorban a feltételeket:

András: Életkoraink összege 90 év.

A megoldás szempontjából nem fontos, hogy András vagy Béla az idősebb, ezért 45 féle összeget képezhetünk: $1+89; 2+48; ...; 45+45$. 1 pont

Béla: Mindkettőnk életkora prímszám.

Ez 9 esetet eredményez:
$7+83; 11+79; 17+73; 19+71; 23+67; 29+61; 31+59; 37+53; 43+47$. 2 pont

András: Életkoraink különbsége négyzetszám.

Ezt a feltételt már csak 2 számpár teljesíti: $53-37=16; 47-43=4$. 2 pont

Béla: Életkorainkat leíró számok számjegyei között van összetett szám is.

A 37 és az 53 számok mindkét számjegye prím, viszont a 43 és a 47 is tartalmazza a 4-et, amely összetett szám. 2 pont

Csaba: Most már tudom az életkoraitokat.

A két életkor a 43 és a 47. 2 pont

András: Ha tényleg tudod, akkor írd le az életkoraink szorzatát erre a papírra!

Az életkorok szorzata: $43 \cdot 47 = 2021$. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2 - 6x + 2x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + 6 = 0.$$

Megoldás:

A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq 0$. 1 pont

Az egyenlet bal oldalán teljes négyzetet alakítunk ki:

$$\left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 7x - 7\sqrt{x} + 6 = 0.$$ 2 pont

A középső két tagból kiemeljük a közös együtthatót:

$$\left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 7\left(x + \sqrt{x}\right) + 6 = 0.$$ 1 pont

Bevezetünk egy új ismeretlent: $y = x + \sqrt{x}$.

Ekkor a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$y^2 - 7y + 6 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $y_1 = 6$; $y_2 = 1$. 1 pont

Ha $y = 6$, akkor $x + \sqrt{x} = 6$, amelyből $\sqrt{x} = -3$ vagy $\sqrt{x} = 2$. 1 pont

Az első egyenlőség nem teljesülhet, a másodikból pedig $x = 4$ következik. 1 pont

Ha pedig $y = 1$, akkor $x + \sqrt{x} = 1$, amelyből $\sqrt{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ vagy $\sqrt{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 1 pont

Az első egyenlőség nem lehetséges, a másodikból pedig $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ adódik. 1 pont

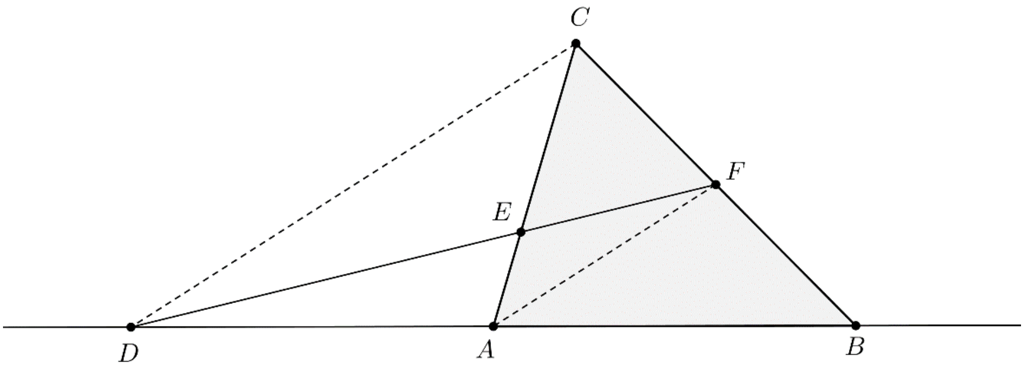
Az egyenlet megoldásai tehát $x = 4$ és $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. A kapott gyökök valóban kielégítik az egyenletet, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB egyenes D pontjára pedig teljesül, hogy az A pont elválasztja B és D pontokat, valamint $AD = AB$. Milyen arányban osztják egymást a DF és AC szakaszok?

Megoldás:

Ábrát készítünk a megoldáshoz, melyen E pont jelöli a DF és AC szakaszok metszéspontját:



1 pont

Az $AD = AB$ feltételből következik, hogy A pont a BD szakasz felezőpontja, és ezért az AC szakasz a BCD háromszög C csúcsából kiinduló súlyvonala. 2 pont

Mivel F pont a BC szakasz felezőpontja, ezért a DF szakasz a BCD háromszög D csúcsából kiinduló súlyvonala. 2 pont

A BCD háromszögben tehát AC és BD súlyvonalak, amelyek az E pontban metszik egymást, emiatt az E pont a BCD háromszög súlypontja. 2 pont

A súlypont a súlyvonalakat a csúcsoktól távolabbi harmadoló pontjukban osztja két részre, ezért a keresett arány: $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$. 3 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

1) *Ha a versenyző az* $\frac{EC}{AE} = \frac{2}{1}$ *arányt adja meg válaszként, akkor természetesen kapja meg az érte járó pontszámot.*
2) *Könnyen belátható, hogy a feladat állítása derékszögű, illetve tompaszögű háromszög esetén is fennáll.*

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sin|x| = |\sin x|.$$

Megoldás:

Az abszolútérték definícióját alkalmazva két esetre bontjuk a megoldást:

1. eset: $x \geq 0$ esetén $\sin x = |\sin x|$, amely akkor teljesül, ha $\sin x \geq 0$. 2 pont

   Az egyenlőtlenség-rendszer megoldása: $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{N}$. 2 pont

2. eset: $x < 0$ esetén $\sin(-x) = |\sin x|$. 1 pont

   Mivel a $\sin x$ függvény páratlan, ezért a fenti egyenlet felírható $-\sin x = |\sin x|$ alakban is, amely akkor teljesül, ha $\sin x \leq 0$. 2 pont

   Az egyenlőtlenség-rendszer megoldása: $-\pi - 2l\pi \leq x \leq -2l\pi$, ahol $l \in \mathbb{N}$. 2 pont

A megoldás során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a fenti intervallumok valóban megoldásai az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha a versenyző az egyenlet bal és jobb oldalán álló kifejezéseket egy-egy függvényként helyesen ábrázolja, akkor azért 3-3 pontot kapjon. A megoldások helyes leolvasásáért 2 pontot, és a helyes felírásáért további 2 pontot kapjon.

5. Egy 5x5-ös négyzetrács közepén áll egy bábu. A bábu egy lépésben olyan négyzetre lép át, amelynek pontosan egy közös csúcsa van azzal a négyzettel, amelyiken a bábu éppen áll. Mennyi a valószínűsége, hogy 2020 lépés után valamelyik sarokban lévő négyzeten áll a bábu?

Megoldás:

Megoldást segítő ábrát készítünk a feladathoz.

0		0		0
	1		1	
0		0		0
	1		1	
0		0		0

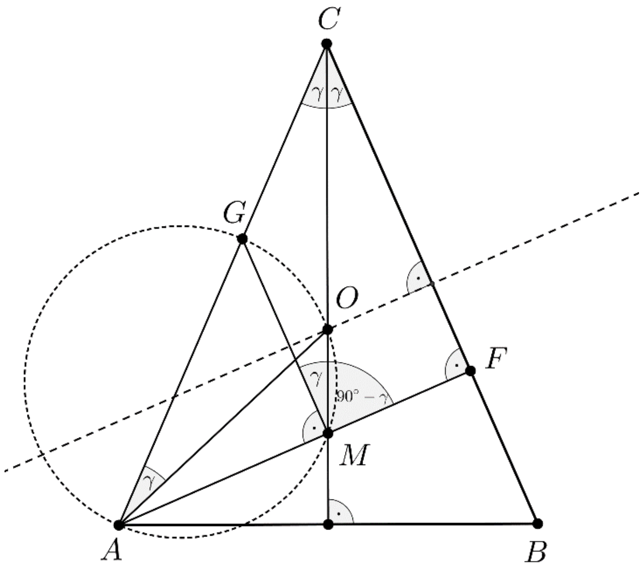
A bábu kezdetben a középső 0-val jelölt négyzeten áll.
Az első lépés után a bábu valamely 1-essel jelölt mezőre kerül. 1 pont
A bábu a második lépésekor csak valamely 0-val jelölt cellára tud lépni, akár visszaléphet a középső négyzetre is.
Észrevehető, hogy a bábu 0-val jelölt mezőről kizárólag 1-essel jelöltre, 1-essel jelöltről pedig csak 0-val jelöltre léphet. 2 pont
Ebből az is következik, hogy minden páratlan számú lépés után, így a 2019. után is a bábu 1-essel jelölt négyzeten áll. 3 pont
A 2020. lépésben bármelyik 1-essel jelölt mezőről lép a bábu, minden esetben négy helyre léphet, amelyek közül pontosan egy négyzet helyezkedik el sarokban. 2 pont
Tehát a kérdezett valószínűség: $p=\frac{1}{4}$. 2 pont

Összesen: 10 pont

6. A hegyesszögű ABC háromszögben $CA=CB$, a háromszög magasságpontja M, körülírt körének középpontja O. Mutassa meg, hogy ha ABC háromszög nem szabályos, akkor az AMO háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik az AC oldalra.

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók, amelyen az $OCA\sphericalangle=\gamma$.



1 pont

Az AMO háromszög körülírt köre az AC oldalt G pontban metszi. Megmutatjuk, hogy AG szakasz az AMO háromszög körülírt körének átmérője, így a kör középpontja illeszkedik az AC szakaszra.

Az AOC háromszög egyenlő szárú, ugyanis OA és OC szakasz is az ABC háromszög körülírt körének sugara. Ebből következően az AC alapon fekvő szögei egyenlő nagyságúak: $OCA\sphericalangle = OAC\sphericalangle = \gamma$. 2 pont

Az AMO háromszög köré írt kör OG ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak: $OAG\sphericalangle = OMG\sphericalangle = \gamma$. 2 pont

Mivel az ABC háromszög szimmetrikus a CM egyenesre nézve, ezért a CMF derékszögű háromszögben $FCM\sphericalangle = \gamma$, amelyből következően $CMF\sphericalangle = 90° - \gamma$. 1 pont

Ezek alapján a $GMF\sphericalangle = OMG\sphericalangle + OMF\sphericalangle = \gamma + 90° - \gamma = 90°$. 1 pont

Az $AMG\sphericalangle$ a $GMF\sphericalangle$ mellékszöge, tehát derékszög. 1 pont

Az AMG háromszög derékszögű, így Thalész-tételének megfordítása alapján a körülírt körének középpontja az AG szakasz felezőpontja. De az AMO és AMG háromszögek körülírt köre azonos, így az AMO háromszög körülírt körének középpontja valóban illeszkedik az AC oldalra. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha az ABC háromszög szabályos, akkor az M és O pontok azonosak, tehát az AMO háromszög nem jön létre.