



OKTATÁSI HIVATAL

**A 2020/2021. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
második forduló**

**MATEMATIKA I. KATEGÓRIA**  
(szakgimnázium, technikum)

**FELADATLAP**

1. Melyek azok az  $x, y$  valós számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenletrendszer?

$$\begin{cases} (x+y) \cdot (x^2 - y^2) = 400 \\ (x-y) \cdot (x^2 + y^2) = 232 \end{cases}$$

2. Legyen  $f(x)$  a természetes számok halmazán értelmezett olyan függvény, amely eleget tesz az  $f(x) + f(f(x)) = 12x + 40$  egyenletnek, és  $f(21) = 71$ . Feltéve, hogy a megadott tulajdonságokkal rendelkező függvény létezik, van-e olyan  $x \in \mathbb{N}$  szám, amelyre  $f(x) = 2021$ ? (Válaszát számítással indokolja.)
3. Egy valós számokból álló számsorozat bármely két egymást követő tagjára teljesül, hogy  $\frac{a_n + a_{n+1}}{2} = n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) és  $a_{221} = 2021$ . Határozza meg a sorozat első 2021 tagjának összegét.
4. Egy baráti társaság e-maileken keresztül tartja a kapcsolatot egymással. Mindenkinek pontosan másik három társának az e-mailcíme van meg, és ez kölcsönös. Tudjuk, hogy bármelyik két ember közvetlenül tud egymásnak levelet küldeni, vagy létezik a társaságból olyan harmadik személy, akin keresztül tudnak levelet váltani. Sorolja fel a társaság létszámának lehetséges értékeit és szemléltesse az egyes eseteket egy-egy gráffal.
5. Legyen az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AB = c$  átfogójához tartozó magasságának talppontja  $D$ , a  $BCD$  és  $ADC$  háromszögekbe írható körök sugara rendre  $r_1$  és  $r_2$ , továbbá az  $ABC$  háromszög területe  $T$ . Bizonyítsa be, hogy

$$r_1 + r_2 + \sqrt{2T} \leq c.$$

Mekkorák a hegyesszögei annak a háromszögnek, amelyben az egyenlőség áll fenn?

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.