OKTATÁSI HIVATAL

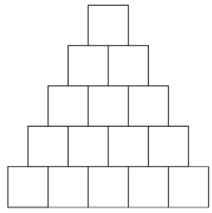
A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. Az ábrán látható számpiramis alsó sorába valamilyen sorrendben az 1, 2, 3, 4, 5 számokat írjuk. Ezután a számpiramis mezőit úgy töltjük ki, hogy minden üres négyzetbe az alatta levő, vele közvetlenül érintkező két négyzetben szereplő szám összege kerüljön. Hányféleképpen lehet kitölteni a számpiramist úgy, hogy a legfelső négyzetben a lehető legnagyobb számot kapjuk?



<u>Megoldás:</u>

A legalsó sorban jelöljük a négyzetekbe írt számokat rendre a, b, c, d és e betűkkel. Ekkor a legalsó sor a következő: $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}$. 1 pont

A felette levő sor minden mezőjét úgy töltjük ki a feltétel szerint, hogy a legalsó sorban levő, vele közvetlenül érintkező két négyzetben szereplő szám összegét írjuk bele:

$a+b$	$b+c$	$c+d$	$d+e$	
a	b	c	d	e

. 1 pont

Folytatva a kitöltést a harmadik sor a következő: $\boxed{a+2b+c}\boxed{b+2c+d}\boxed{c+2d+e}$. 1 pont

Ugyanígy alulról számítva a negyedik sor: $\boxed{a+3b+3c+d}\boxed{b+3c+3d+e}$. 1 pont

Végül a legfelső négyzetbe a következő összeg kerül: $\boxed{a+4b+6c+4d+e}$. 1 pont

Ez az összeg akkor lesz maximális, ha $c=5$, 1 pont

emellett $b=4$ és $d=3$ vagy $b=3$ és $d=4$, 1 pont

végül $a=2$ és $e=1$ vagy $a=1$ és $e=2$. 1 pont

Ez összesen $1\cdot 2\cdot 2=4$ lehetőség. <u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *Mind a 4 esetben a maximális összeg: 61, ez a szám kerül a legfelső négyzetbe.*

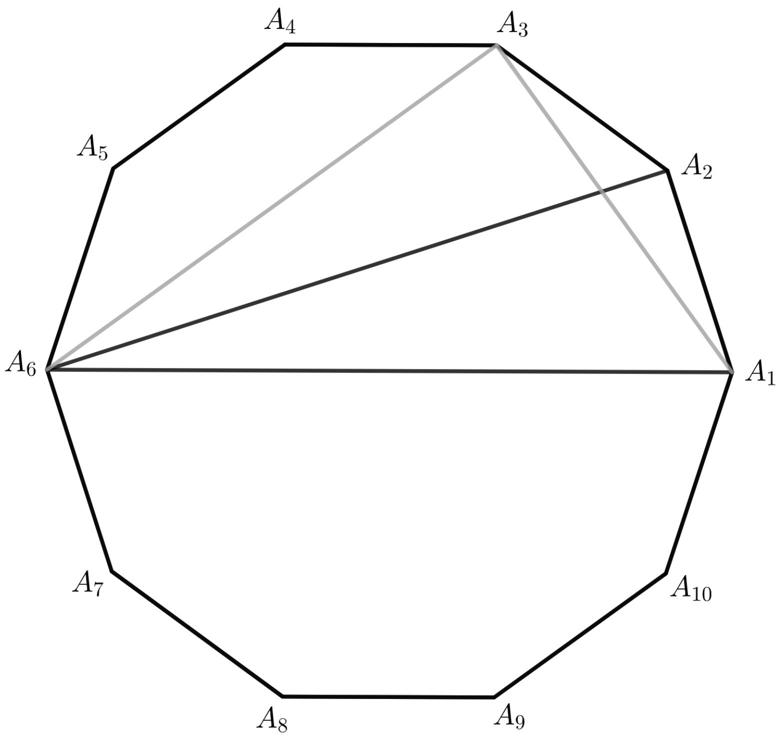
Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

2. Egy aula padlója szabályos tízszög alakú. Díszítésként a tízszög minden oldalát és átlóját aranyszínűre festették. Hány olyan derékszögű háromszög keletkezett így, amelynek kerülete aranyszínű és derékszögű csúcsa a szabályos tízszög kerületén van?

Megoldás:

A szabályos tízszögben úgy kaphatunk a feltételeknek megfelelő derékszögű háromszögeket, ha a derékszögű csúcsok a tízszög csúcsaival esnek egybe, és a háromszögek befogóegyenesei minden esetben a tízszög két átellenes csúcsán mennek keresztül. 1 pont

Tekintsük a következő ábrát:



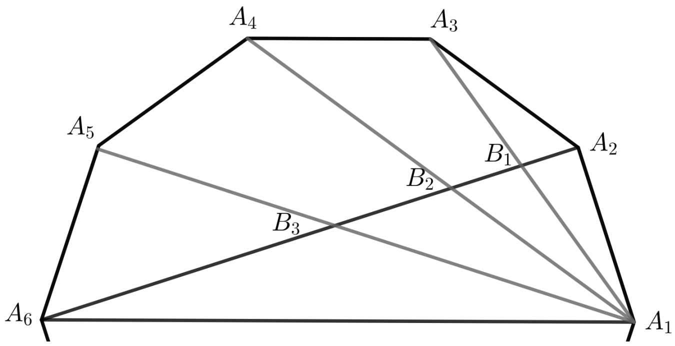
Olyan derékszögű háromszögből kétféle van, amelynek mindhárom csúcsa a tízszög valamely csúcsával egyezik meg. Az egyik az $A_1A_2A_6$ háromszöggel, a másik a $A_1A_3A_6$ háromszöggel egybevágó. 2 pont

Az A_1A_6 átmérőt rögzítve mindkét típusú háromszögből pontosan 4 darab található a tízszögben:

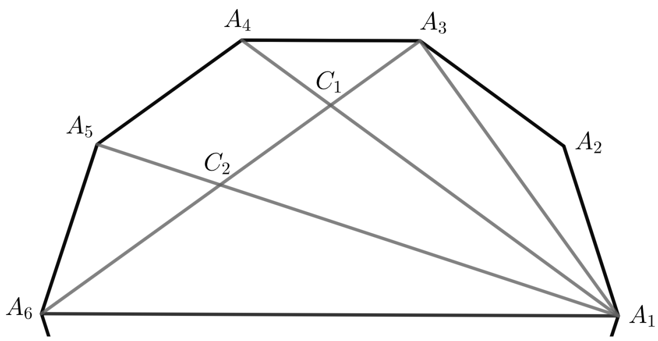
$A_1A_2A_6 \cong A_1A_5A_6 \cong A_1A_7A_6 \cong A_1A_{10}A_6$, illetve $A_1A_3A_6 \cong A_1A_4A_6 \cong A_1A_8A_6 \cong A_1A_9A_6$. 1 pont

A szabályos tízszögnek 5 olyan átlója van, amelynek végpontjai a sokszög köré írt körben átellenes csúcsok ezért a fenti háromszögpárból $5 \cdot 4 = 20$ darab van benne. 1 pont

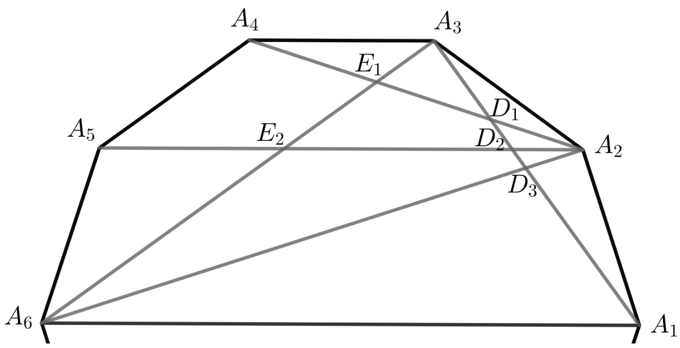
Az alábbi három ábra közül az elsőn az $A_1A_2A_6$ háromszög, és belőle az A_1 csúcsból induló átlók által levágott derékszögű háromszögek láthatók: $A_1A_2B_1$, $A_1A_2B_2$ és $A_1A_2B_3$. Ez összesen 4 megfelelő derékszögű háromszög. 1 pont



A másodikon az $A_1A_3A_6$ háromszög, és belőle az A_1 csúcsból induló átlók által levágott derékszögű háromszögek láthatók: $A_1A_3C_1$ és $A_1A_3C_2$. Ez összesen 3 megfelelő derékszögű háromszög. 1 pont



A harmadikon az $A_1A_3A_6$ háromszög, és belőle az A_2 csúcsból induló átlók által levágott derékszögű háromszögek láthatók: $D_1A_3E_1$, $D_2A_3E_2$ és $D_3A_3A_6$. Ez összesen további 3 megfelelő derékszögű háromszög. (Az $A_1A_3A_6$ háromszöget már korábban számoltuk.) 1 pont



A fentiek alapján egy háromszögpárhoz $4+3+3=10$ derékszögű háromszög tartozik. 1 pont

Tehát a 20 háromszögpárhoz összesen $20 \cdot 10 = 200$ olyan háromszög tartozik, amely megfelel a feltételeknek. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *Belátható, hogy a $2n$ oldalú szabályos sokszögben a feltételeknek megfelelő háromszögek száma $\frac{n^2\left(n^2-1\right)}{3}$, így a feladatban szereplő szabályos tízszögben* $\frac{5^2\left(5^2-1\right)}{3}=200$.

3. Adott az $A=\operatorname{tg}\frac{x\cdot\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{y\cdot\pi}{6}$ kifejezés, ahol x és y pozitív egész számok.
   a) Határozza meg az A kifejezés értelmezési tartományát.
   b) Amennyiben x és y véletlenszerűen választott, 2022-nél kisebb, különböző pozitív egész számok, akkor adja meg annak valószínűségét, hogy az A kifejezés értelmezhető.

Megoldás:

a) A tangens függvény $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ helyeken nem értelmezhető, így egyrészt $\frac{x\cdot\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{N}$, amelyből $x\neq 4k+2$, ahol $k\in\mathbb{N}$. 1 pont

Másrészt $\frac{y\cdot\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+l\pi$, ahol $l\in\mathbb{N}$, amelyből $y\neq 6l+3$, ahol $l\in\mathbb{N}$. 1 pont

Tehát az A kifejezés értelmezési tartománya $x, y\in\mathbb{Z}^+$ és $x\neq 4k+2$, illetve $y\neq 6k+3$, ahol k, $l\in\mathbb{N}$. 1 pont

b) Az x értékeket tekintve a $4k+2$ alakú számok nem elemei az értelmezési tartománynak, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Ez 2021-ig összesen $\frac{2018-2}{4}+1=505$ szám, vagyis $2021-505=1516$ számot tartalmaz az értelmezési tartomány. 1 pont

Az y értékeket tekintve a $6l+3$ alakú számok nem elemei az értelmezési tartománynak, ahol $l\in\mathbb{Z}$. Ez 2021-ig összesen $\frac{2019-3}{6}+1=337$ szám, vagyis $2021-337=1684$ számot tartalmaz az értelmezési tartomány. 1 pont

Mivel a $4k+2$ alakú számok halmazában minden szám páros, a $6l+3$ alakú számokéban pedig minden szám páratlan, ezért a metszetük üres. Ebből következően $2021-337-505=1179$ olyan egész szám van 2021-ig, amelyek mindkét kifejezést tekintve beletartozik az értelmezési tartományba. 1 pont

A kedvező esetek számát két esetre bontva kapjuk meg.

Ha x-nek olyan értéket választunk, amelyet y nem vehet fel (ez 337 féle érték), akkor y értéke bármi lehet (ez 1684 féle érték) az értelmezési tartományból. Ez $337\cdot 1684=567508$ eset. 1 pont

Ha pedig x-nek olyan értéket választunk, amelyet y is felvehet (ez 1179 féle érték), akkor y bármi lehet, kivéve az x értéke (ez 1683 féle érték), tehát ez $1179\cdot 1683=1984257$ eset. 1 pont

Az x és y értékeinek különbözősége miatt összesen $2021\cdot 2020=4082420$ értékpár választható. 1 pont

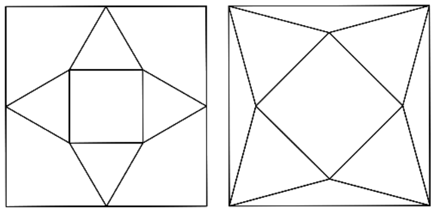
Tehát annak a valószínűsége, hogy az A kifejezés értelmezhető $P=\frac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{összes eset száma}}=\frac{567508+1984257}{4082420}=\frac{5053}{8084}\approx 0,625$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *A megoldás komplementer valószínűséggel:*

$$1-\frac{505}{2021}-\frac{337}{2021}+\frac{505}{2021}\cdot\frac{337}{2020}=\frac{5053}{8084}\approx 0,625.$$

4. Két egybevágó négyzetbe belerajzoltuk egy-egy négyzet alapú gúla hálóját a mellékelt ábrák szerint. Mindkét gúla rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy éleinek hossza egyenlő. Mekkora a két gúla térfogatának aránya?

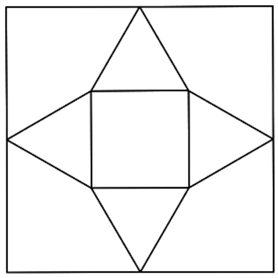


Első megoldás:

Az egybevágó négyzetek oldalának hossza nem befolyásolja a két gúla térfogatának arányát, ezért választhatjuk egységnek.

A négyzet alapú gúlák oldallapjai szabályos háromszögek, 1 pont

A következő ábrán a bal oldali gúla hálója látható.



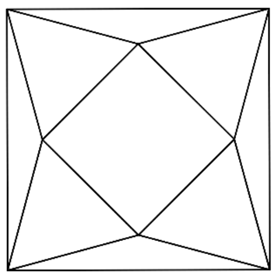
A négyzet oldalának hossza a gúla alapélének és két szemközti oldallap magasságának az összege. 1 pont

Legyen a gúla alapéle a, ekkor az oldallapok magassága $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ezek segítségével felírva a négyzet oldalának hossza: $a + 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Mivel a négyzet oldalát egységnek választottuk, ezért $a = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 1 pont

A következő ábrán a jobb oldali gúla hálója látható:



A négyzet átlójának hossza a gúla alapélének és két szemközti oldallap magasságának az összege. 1 pont

Legyen a gúla alapéle b, ekkor az oldallapok magassága $m_b = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Ezek segítségével felírva a négyzet átlójának hossza: $b + 2\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2} = b\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Mivel a négyzet oldalát egységnek választottuk, ezért a négyzet átlója $\sqrt{2}$ hosszúságú, amelyből $b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. 1 pont

A két négyzet alapú egyenes gúla egymáshoz hasonló, hiszen az oldallapjaik szabályos háromszögek. 2 pont

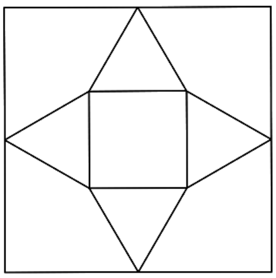
Az alapélek hasonlóságának aránya $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1 pont

Ebből következik, hogy a két gúla térfogatának aránya ennek a harmadik hatványa, tehát $\frac{V_a}{V_b}=\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. <u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont

<u>Második megoldás:</u>

Az egybevágó négyzetek oldalának hossza nem befolyásolja a két gúla térfogatának arányát, ezért választhatjuk egységnek.
A gúlák oldallapjai szabályos háromszögek. 1 pont
A következő ábrán a bal oldali gúla hálója látható.



A négyzet oldalának hossza a gúla alapélének és két szemközti oldallap magasságának az összege. 1 pont

Legyen a gúla alapéle a, ekkor az oldallapok magassága $m_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ezek segítségével felírva a négyzet oldalának hossza: $a+2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=a\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Mivel a négyzet oldalát egységnek választottuk, ezért $a=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, így az oldallapok magassága $m_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$. 1 pont

A gúla testmagassága Pitagorasz-tétel segítségével:

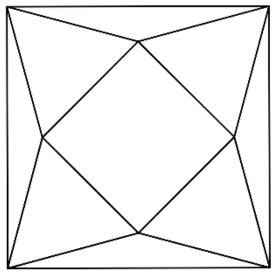
$$M_a=\sqrt{m_a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{6-3\sqrt{3}}{8}-\frac{2-\sqrt{3}}{8}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$ 1 pont

A gúla térfogata:

$$V_a=\frac{T_a\cdot M_a}{3}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}}{3}=\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}}{3}=\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{12},$$

ahol $T_a=a^2$ a gúla alaplapjának területe, M_a pedig a gúla testmagassága. 1 pont

A következő ábrán a jobb oldali gúla hálója látható:



A négyzet átlójának hossza a gúla alapélének és két szemközti oldallap magasságának az összege. 1 pont

Legyen a gúla alapéle b, ekkor az oldallapok magassága $m_b=\frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Ezek segítségével felírva a négyzet átlójának hossza: $b+2\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2}=b\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Mivel a négyzet oldalát egységnek választottuk, ezért a négyzet átlója $\sqrt{2}$ hosszúságú, amelyből $b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, így az oldallapok magassága

$$m_b=\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$ 1 pont

A gúla testmagassága Pitagorasz-tétel segítségével:

$$M_b=\sqrt{m_b^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{6-3\sqrt{3}}{4}-\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$ 1 pont

A gúla térfogata:

$$V_b=\frac{T_b\cdot M_b}{3}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{3}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{3}=\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{3\sqrt{2}},$$

ahol $T_b=b^2$ a gúla alaplapjának területe, M_b pedig a gúla testmagassága. 1 pont

A két gúla térfogatának aránya: $\frac{\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{12}}{\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{3\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Adja meg a p pozitív prím paraméter értékét, ha tudjuk, hogy a

$$\frac{2}{3} < \frac{3p}{5x-2p} < \frac{3}{4}$$

egyenlőtlenségrendszernek pontosan egy x egész megoldása van.

Megoldás:

Pozitív p értékek esetén a $\frac{3p}{5x-2p}$ kifejezés értéke csak úgy eshet két pozitív szám közé, ha maga is pozitív, vagyis $5x-2p>0$. Ez csak akkor lehetséges, ha $x > \frac{2p}{5}$. 1 pont

Mivel az egyenlőtlenségrendszerben szereplő törtek számlálója és nevezője is pozitív, ezért ha azok reciprokát vesszük, akkor ekvivalens lesz a következővel:

$$\frac{4}{3} < \frac{5x-2p}{3p} < \frac{3}{2}.$$ 2 pont

Mivel p értéke pozitív, ezért ha szorozva a közös nevezővel:

$$8p < 10x-4p < 9p.$$ 1 pont

Hozzáadunk $4p$-t az oldalakhoz:

$$12p < 10x < 13p.$$ 1 pont

A feltétel alapján felírtuk, hogy $x > \frac{2p}{5}$, amelyből $10x > 4p$ biztosan következik.

Olyan p prímeket keresünk, amelyeknek 12-szerese és 13-szorosa között a 10-nek pontosan egy többszöröse van. Mivel $13p-12p=p$, ezért ha $p>20$, akkor a 10-nek biztosan legalább két többszöröse kerül $12p$ és $13p$ közé. Eszerint $p>20$ nem lehetséges, tehát csak a 20-nál kisebb pozitív prímszámokat kell figyelembe vennünk. 2 pont

A p prímszám lehetséges értékei 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 és 19, amelyek közül pontosan egy x egész megoldása akkor van az egyenlőtlenségrendszernek, ha $p = 7, 11, 13$. Ezen prímszámok valóban teljesítik az egyenlőtlenségrendszert, x értékei ezen esetekben rendre 9, 14, 16. 3 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: *A versenyző úgy is eljuthat a megoldáshoz, ha azt vizsgálja, hogy mikor lesz pontosan egy egész szám $1{,}2p$ és $1{,}3p$ között.*

Akkor is maximális pontot kaphat a versenyző, ha az x értékeit nem számítja ki a megoldás során.