

OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)
FELADATLAP

1. Határozza meg az n természetes számot és az X számjegyet, ha teljesül, hogy

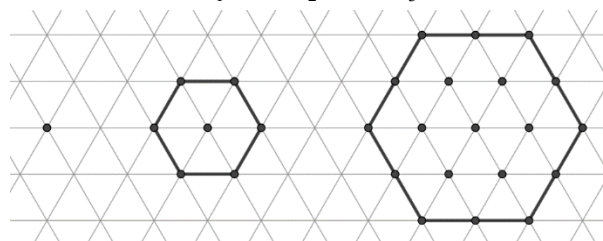
$$\frac{n}{1221} = 0, \dot{1}2\dot{X} = 0,12X12X12X\dots$$

2. Határozza meg a p valós paraméter azon értékeit, amelyekre a következő egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán:

$$500 \cdot 25^x = 10^{2x+3} \cdot 2^{x^2-p}.$$

3. Nevezzük a H számot „hatszögletű-kerekerdő-szám”-nak, ha a szabályos háromszögrács egy szabályos hatszögének belsejében és határán összesen pontosan H darab rácspont van. Jelölje h_n a nagyság szerinti sorrendben az n -edik „hatszögletű-kerekerdő-szám”-ot. Az alábbi ábra az első három „hatszögletű-kerekerdő-szám”-ot szemlélteti ($h_1 = 1$, $h_2 = 7$, $h_3 = 19$).

- a) Határozza meg h_5 értékét.
b) Adja meg h_n értékét n függvényében.
c) Adja meg az összes olyan „hatszögletű-kerekerdő-szám”-okból álló számpárt, amelyek különbsége 60.



4. Legyen az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja D , továbbá az E az AC , az F pedig a BC befogó egy-egy belső pontja úgy, hogy $EDF \sphericalangle = 90^\circ$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy $EF^2 = AE^2 + BF^2$.

5. Legyenek a , b és c olyan pozitív valós számok, amelyekre $a + b + c = 1$.

- a) Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{4}{3} \leq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2.$$

Az a , b és c mely értékei esetén teljesül az egyenlőség?

- b) Igazolja, hogy

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 < 2.$$

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

