OKTATÁSI HIVATAL

2022/2023. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)
Javítási-értékelési útmutató

1. Határozza meg az n természetes számot és az X számjegyet, ha teljesül, hogy

$$\frac{n}{1221} = 0,\dot{1}2\dot{X} = 0,12X12X12X\ldots$$

<u>Első megoldás:</u>

A tizedes tört ismétlődő szakasza 3 tizedesjegyből áll (12X), ami nem változik, ha 1000-rel megszorozzuk a számot, vagyis

$$\frac{1000n}{1221} = 12X,\dot{1}2\dot{X}.$$ 2 pont

Ebből kivonva az eredeti számot a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{999n}{1221} = \overline{12X}.$$ 2 pont

A bal oldalon álló tört egyszerűsítése után

$$\frac{9n}{11} = \overline{12X}.$$ 1 pont

Mivel a 9 és a 11 relatív prímek, ezért a $\overline{12X}$ szám osztható 9-cel, 1 pont
ami csak úgy lehetséges, ha X értéke 6. 2 pont
Ekkor pedig n értéke 154. 1 pont

Tehát $n = 154$ és $X = 6$ esetén $\frac{154}{1221} = 0,\dot{1}2\dot{6}$. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

Második megoldás:

A keresett $0,\dot{1}2\dot{X}$ számot becsüljük alulról és felülről:

$$0{,}12 \le 0,\dot{1}2\dot{X} \le 0{,}13.$$ 2 pont

Emiatt

$$0{,}12 \le \frac{n}{1221} \le 0{,}13.$$ 1 pont

Rendezés után az egyenlőtlenségrendszer megoldása

$$146{,}52 \le n \le 158{,}73.$$ 2 pont

Mivel n egész szám, ezért 12 esetet kell megvizsgálni, amelyek közül csak $n = 154$ esetén kapjuk eredményül a kívánt alakú számot. 3 pont

Ha $n = 154$, akkor $X = 6$. 1 pont

Ekkor $\frac{154}{1221} = 0,\dot{1}2\dot{6}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző indoklás nélkül adja meg n, illetve X értékét, akkor ezért 1-1 pontot kap.

2. Határozza meg a p valós paraméter azon értékeit, amelyekre a következő egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán:

$$500 \cdot 25^x = 10^{2x+3} \cdot 2^{x^2-p}.$$

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalát $500 \cdot 25^x (\ne 0)$ kifejezéssel elosztva kapjuk, hogy

$$1 = 2^{2x+1} \cdot 2^{x^2-p},$$ 2 pont

amelyből

$$2^0 = 2^{x^2+2x+1-p}.$$ 2 pont

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

$$0 = x^2 + 2x + 1 - p.$$ 1 pont

A fenti másodfokú egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán, ha a diszkriminánsa negatív, tehát

$$D = 4 - 4 \cdot (1 - p) < 0.$$ 3 pont

Tehát $p < 0$. 1 pont

Az egyenletnek nincs megoldása, ha p értéke negatív valós szám. 1 pont

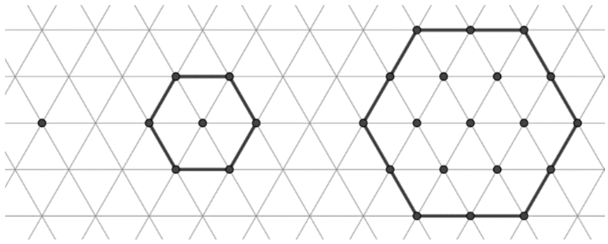
Összesen: 10 pont

3. Nevezzük a H számot „hatszögletű-kerekerdő-szám”-nak, ha a szabályos háromszögrács egy szabályos hatszögének belsejében és határán összesen pontosan H darab rácspont van. Jelölje h_n a nagyság szerinti sorrendben az n-edik „hatszögletű-kerekerdő-szám”-ot. Az alábbi ábra az első három „hatszögletű-kerekerdő-szám”-ot szemlélteti ($h_1 = 1$, $h_2 = 7$, $h_3 = 19$).

a) Határozza meg h_5 értékét.

b) Adja meg h_n értékét n függvényében.

c) Adja meg az összes olyan „hatszögletű-kerekerdő-szám”-okból álló számpárt, amelyek különbsége 60.



Megoldás:

a) A h_n sorozat definíciója alapján $h_4 = 37$ és $h_5 = 61$. 2 pont

b) A „hatszögletű-kerekerdő-szám” kifejezést a továbbiakban HKSZ-ként rövidítjük. Az n-edik HKSZ-t megkapjuk, ha a külső (legnagyobb) szabályos hatszögén lévő rácspontok számához hozzáadjuk az $(n-1)$-edik HKSZ-t. A h_n-t meghatározó alakzat külső hatszögének minden oldalán n darab rácspont van, de mivel a hatszög csúcsai két oldalhoz is hozzátartoznak, ezért a külső hatszögön a rácspontok száma $6 \cdot n - 6 = 6(n-1)$. Ezek alapján az n-edik HKSZ-re érvényes a

$$h_n = 6(n-1) + h_{n-1}$$

rekurzív összefüggés. 1 pont

A kapott összefüggés alapján

$$\begin{aligned} h_n - h_{n-1} &= 6(n-1), \\ h_{n-1} - h_{n-2} &= 6(n-2), \\ &\vdots \\ h_3 - h_2 &= 6 \cdot 2, \\ h_2 - h_1 &= 6 \cdot 1. \end{aligned}$$

1 pont

Az egyenlőségek megfelelő oldalainak összeadása után azt kapjuk, hogy

$$h_n - h_1 = 6 \cdot \left((n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1\right).$$

1 pont

A bal oldalon a zárójelben az első $n-1$ pozitív egész szám összege áll, így

$$\begin{aligned} h_n - 1 &= 6 \cdot \frac{n-1+1}{2} \cdot (n-1), \\ h_n - 1 &= 3n^2 - 3n, \\ h_n &= 3n^2 - 3n + 1. \end{aligned}$$

1 pont

c) Ha az n-edik és a k-adik $(n > k > 0)$ HKSZ különbsége 60, akkor a b) feladat eredménye alapján

$$\begin{aligned} \left(3n^2 - 3n + 1\right) - \left(3k^2 - 3k + 1\right) &= 60, \\ 3n^2 - 3k^2 - 3n + 3k &= 60, \\ n^2 - k^2 - n + k &= 20. \end{aligned}$$

1 pont

Az egyenlet bal oldalán szorzattá alakíthatunk, így

$$(n-k)(n+k)-(n-k)=20,$$
$$(n-k)(n+k-1)=20.$$ 1 pont

A kialakuló szorzat tényezőire $n-k<n+k-1$ teljesül, ezért a 20 lehetséges szorzattá bontásait az alábbi táblázat tartalmazza.

$n-k$	1	2	4
$n+k-1$	20	10	5

1 pont

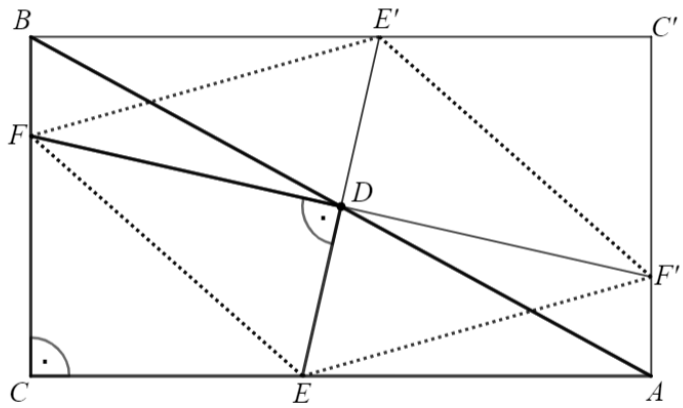
Az első esetben $n = 11$, $k = 10$, a második esetben nem kapunk (egész) megoldásokat, a harmadik esetben pedig $n = 5$, $k = 1$. Ezek alapján két olyan HKSZ-ekből álló számpár létezik, amelyek különbsége 60, mégpedig h_{11} és h_{10}, valamint h_5 és h_1. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Legyen az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja D, továbbá az E az AC, az F pedig a BC befogó egy-egy belső pontja úgy, hogy $EDF\sphericalangle = 90°$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy $EF^2 = AE^2 + BF^2$.

Első megoldás:

Ábrát készítünk a megoldáshoz, melyen tükrözzük az ABC háromszöget, valamint az E és F pontokat a D középpontra. A kapott képháromszöget és képpontokat jelölje rendre BAC', E' és F'. Így az $AC'BC$ téglalapot kapjuk, hiszen az ABC háromszög hegyesszögei 90°-ra egészítik ki egymást.



3 pont

A középpontos tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt $EF = E'F'$ és $EF \parallel E'F'$, így az $EF'E'F$ négyszög paralelogramma. 2 pont

Az $EF'E'F$ paralelogramma rombusz, mert átlói merőlegesek egymásra. Tehát oldalai egyenlő hosszúságúak, így $EF' = EF$. 2 pont

Szintén a középpontos tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt $AF' = BF$. 1 pont

Alkalmazzuk az EAF' derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt:

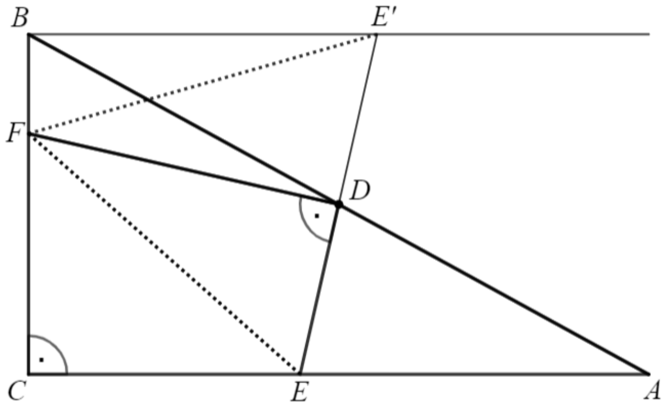
$$EF'^2 = AE^2 + AF'^2.$$ 1 pont

Mivel $EF' = EF$ és $AF' = BF$, ezért $EF^2 = AE^2 + BF^2$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Ábrát készítünk a megoldáshoz, amelyen párhuzamost húzunk az AC befogóval a B ponton át. Az ED egyenesnek a párhuzamossal vett metszéspontja legyen E'.



2 pont

A párhuzamosság miatt $CBE'\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Mivel az AED, illetve a $BE'D$ háromszög szögei páronként egyenlők és $BD = AD$, ezért a két háromszög egybevágó, 2 pont

amiből $AE = BE'$ és $ED = E'D$ is következik. 2 pont

Mivel az F pont illeszkedik az EE' szakasz felezőmerőlegesére, így $E'F = EF$. 1 pont

Alkalmazzuk az FBE' derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt:

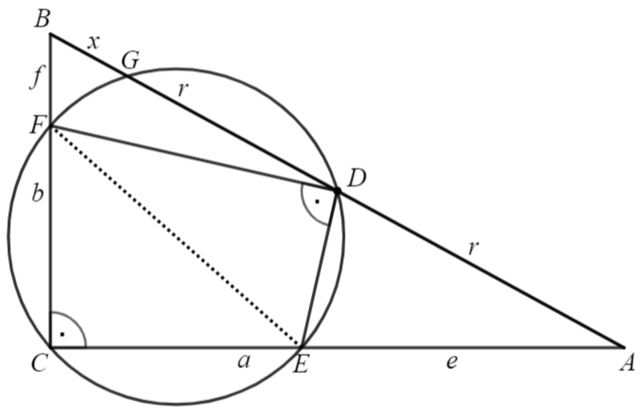
$$E'F^2 = BE'^2 + BF^2.$$ 1 pont

Mivel $E'F = EF$ és $BE' = AE$, ezé $EF^2 = AE^2 + BF^2$. 1 pont

Összesen: 10 pont

Harmadik megoldás:

Ábrát készítünk a megoldáshoz, amelyen $AC = a$, $BC = b$, $AE = e$ és $BF = f$. Az ABC derékszögű háromszög köré írt körének sugara $AD = BD = r$.



1 pont

A $CEDF$ négyszög húrnégyszög, hiszen a C és D csúcsánál lévő szögek összege $90° + 90° = 180°$. Legyen a húrnégyszög köré írt kör AB oldallal való másik metszéspontja G és $BG = x$. 1 pont

A körhöz húzott szelőszakaszok tétele alapján a *CEDF* húrnégyszög köré írt köréhez az *A* csúcsból húzott szelőszakaszok szorzata állandó, tehát

$$r\cdot(2r-x)=e\cdot a,$$

$$2r^2-rx=ea.$$ 1 pont

Ugyanígy a *B* csúcsból húzott szelőszakaszok szorzata is állandó, tehát

$$xr=fb.$$ 1 pont

A kapott összefüggések megfelelő oldalait összeadva

(1) $$2r^2=fb+ea.$$ 1 pont

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az *ABC* derékszögű háromszögben:

(2) $$a^2+b^2=4r^2.$$ 1 pont

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az *EFC* derékszögű háromszögben:

$$(a-e)^2+(b-f)^2=EF^2.$$ 1 pont

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$a^2+b^2+e^2+f^2-2ae-2bf=EF^2,$$ 1 pont

amelyből felhasználva (1)-et és (2)-t

$$4r^2+e^2+f^2-4r^2=EF^2,$$ 1 pont

tehát $e^2+f^2=AE^2+BF^2=EF^2$. Ezzel az állítást igazoltuk. 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Legyenek a, b és c olyan pozitív valós számok, amelyekre $a+b+c=1$.
   a) Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{4}{3}\le(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

   Az a, b és c mely értékei esetén teljesül az egyenlőség?
   b) Igazolja, hogy

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2<2.$$

<u>Első megoldás:</u>

a) Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív $a+b$, $b+c$ és $c+a$ kifejezésekre: 1 pont

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{3}}\ge\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}=\frac{2(a+b+c)}{3}=\frac{2}{3},$$

hiszen a feladat feltétele alapján $a+b+c=1$. 2 pont

A kapott egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív kifejezés áll, ezért mindkét oldalt négyzetre emeljük, és így kapjuk, hogy

$$\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{3}\ge\frac{4}{9},$$

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\ge\frac{4}{3},$$

ami épp a bizonyítandó állítás. 1 pont

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget egyenlő számokra alkalmazzuk, vagyis $a+b=b+c=c+a$. 1 pont

Mivel $a+b+c=1$, ezért $a=b=c=\frac{1}{3}$ esetén teljesül az egyenlőség. 1 pont

b) Átalakítjuk a bal oldali kifejezést:

$$\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(c+a\right)^2=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca=$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2+4ab+4bc+4ca-2\left(ab+bc+ca\right)=$$
$$=2\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right)=2-2\left(ab+bc+ca\right).$$ 3 pont

Mivel a, b és c pozitív, ezért $2-2\left(ab+bc+ca\right)<2$, tehát a b) rész-feladat állítása is igaz. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

a) Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív a, b és c számokra:

$$\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$ 1 pont

Mivel $a+b+c=1$, ezért négyzetre emelés és rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3}\le a^2+b^2+c^2.$$ 1 pont

A bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés átalakítása és a kapott egyenlőtlenség alkalmazása után kapjuk, hogy

$$\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(c+a\right)^2=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca=$$
$$=\left(a+b+c\right)^2+a^2+b^2+c^2=1+a^2+b^2+c^2\ge 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$ 2 pont

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget egyenlő számokra alkalmazzuk, vagyis ha

$$a=b=c=\frac{1}{3}.$$ 2 pont

b) Felhasználjuk az a) feladatrészben kapott eredményünket:

$$\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(c+a\right)^2=1+a^2+b^2+c^2.$$ 1 pont

Mivel a pozitív a, b és c számokra $a+b+c=1$, ezért mindegyik 1-nél kisebb pozitív valós szám. 1 pont

Emiatt $a>a^2$, $b>b^2$ és $c>c^2$, vagyis az egyenlőtlenségek megfelelő oldalának összegére $1=a+b+c>a^2+b^2+c^2$. 1 pont

Tehát $\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(c+a\right)^2=1+a^2+b^2+c^2<1+1=2$. 1 pont

Összesen: 10 pont