OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)

FELADATLAP

1. Adott a síkban egy 20 oldalú konvex sokszög, melynek csúcsai rendre $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$. Tekintsük azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek csúcsai a húszszög csúcsai közül kerülnek ki. Az így kapott négyszögek között hány olyan van, amelynek nincs közös oldala az $A_1A_2 \ldots A_{20}$ húszszög oldalaival? (Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik csúcsuk különböző.)

2. a) Oldja meg a következő egyenletet a pozitív egész számpárok halmazán:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2},$$

ahol $1 \le x_1 < x_2$.

b) Melyek azok az $n \ge 3$ pozitív egész számok, amelyekre az

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{3}{2}$$

egyenletnek van páronként különböző pozitív egész számokból álló megoldása?

3. Adott az O csúcsú 60°-os szögtartomány, és a belsejében egy P pont. A P pont szögszáraktól való távolságát jelölje a, illetve b.

a) Fejezze ki az OP távolságot a és b függvényeként.

b) Bizonyítsa be, hogy végtelen sok olyan különböző pozitív a és b egész szám létezik, amelyre az OP távolság is egy pozitív egész szám.

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja