OKTATÁSI HIVATAL

2022/2023. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

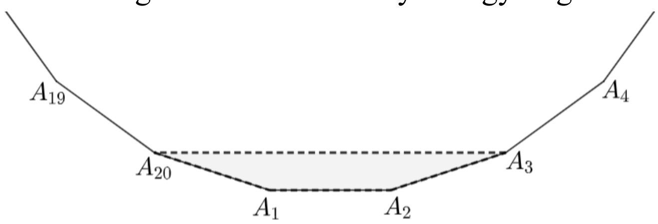
MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(szakgimnázium, technikum)
Javítási-értékelési útmutató

1. Adott a síkban egy 20 oldalú konvex sokszög, melynek csúcsai rendre $A_1, A_2, ..., A_{20}$. Tekintsük azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek csúcsai a húszszög csúcsai közül kerülnek ki. Az így kapott négyszögek között hány olyan van, amelynek nincs közös oldala az $A_1A_2...A_{20}$ húszszög oldalaival? (Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik csúcsuk különböző.)

Első megoldás:

Összeszámoljuk azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek a csúcsai az adott húszszög csúcsai közül kerülnek ki, majd ezek számából kivonjuk azoknak a konvex négyszögeknek a számát, amelyeknek van közös oldala a húszszöggel. Mivel az $A_1, A_2, ..., A_{20}$ pontok közül 4 pontot $\binom{20}{4} = 4845$-féleképpen lehet kiválasztani, és minden kiválasztott pontnégyes pontosan egy konvex négyszöget határoz meg, ezért összesen 4845 konvex négyszöget határoznak meg a húszszög csúcsai. 1 pont

Azok a konvex négyszögek, amelyeknek van közös oldala a húszszöggel, a közös oldalak száma szerint három csoportba sorolhatók.
Ha a négyszögnek és a húszszögnek három közös oldala van, akkor ezek a húszszögben csak szomszédos oldalak lehetnek (1. ábra). Az oldalak közül a „középső”, az ábrán A_1A_2-vel jelölt oldal a húszszög bármely oldala lehet, így megválasztására 20 lehetőség adódik. Tehát az ilyen négyszögek száma 20.

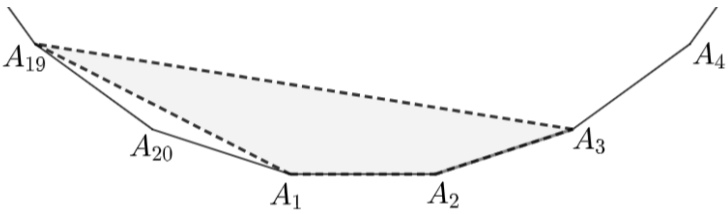


1. ábra

1 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

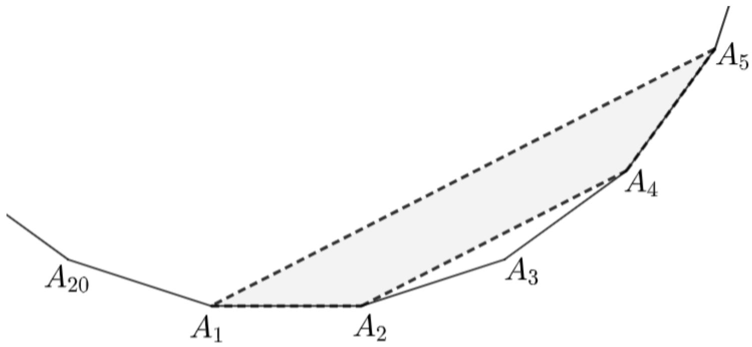
Vizsgáljuk azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek két közös oldala van a húszszöggel. Ha a közös oldalak a húszszögben szomszédos oldalak (2. ábra), akkor ennek a két oldalnak a közös végpontja a húszszög bármely csúcsa lehet (az ábrán ez a csúcs A_2), így megválasztására 20 lehetőség adódik. A szomszédos oldalak végpontjai a négyszög három csúcsát meghatározzák, a negyedik csúcs pedig 15-féle lehet (az ábrán az A_1, A_2, A_3 csúcsok mellé az A_4, illetve az A_{20} csúcsok nem választhatók, mert akkor a kiválasztott négyszögnek már 3 közös oldala lenne a húszszöggel), ezért az ilyen tulajdonságú négyszögek száma $20 \cdot 15 = 300$.



2. ábra

2 pont

Ha a négyszögnek és a húszszögnek két közös oldala van, de azok nem szomszédos oldalak a húszszögben (3. ábra), akkor az egyik közös oldal megválasztására 20 lehetőségünk van, a másik közös oldal 15-féle lehet (az ábrán az A_1A_2 oldal mellé az $A_4A_5, A_5A_6, ..., A_{18}A_{19}$ oldalak választhatók), ezért ilyen négyszögből összesen $\frac{20 \cdot 15}{2} = 150$ van.



3. ábra

2 pont

Tekintsük azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek egyetlen közös oldala van a húszszöggel. Tegyük fel, hogy a közös oldal a húszszög A_1A_2 oldala. A négyszög további két csúcsa az $A_4, ..., A_{19}$ csúcsok közül bármelyik két nem szomszédos csúcs lehet. Az $A_4, ..., A_{19}$ csúcsok közül összesen $\binom{16}{2} = 120$ féleképpen választhatunk ki két csúcsot, és ezek közül 15 esetben $(A_4A_5, ..., A_{18}A_{19})$ kapunk szomszédosokat. Ezért azoknak a konvex négyszögeknek a száma, amelyeknek csak az A_1A_2 oldaluk közös a húszszög oldalaival $120 - 15 = 105$.

Mivel a közös oldalt 20-féleképpen választhatjuk meg, ezért a négyszögek száma összesen $20 \cdot 105 = 2100$. 3 pont

A feladat feltételeinek megfelelő konvex négyszögek száma tehát

$4845 - 20 - 300 - 150 - 2100 = 2275$. 1 pont

Összesen: 10 pont

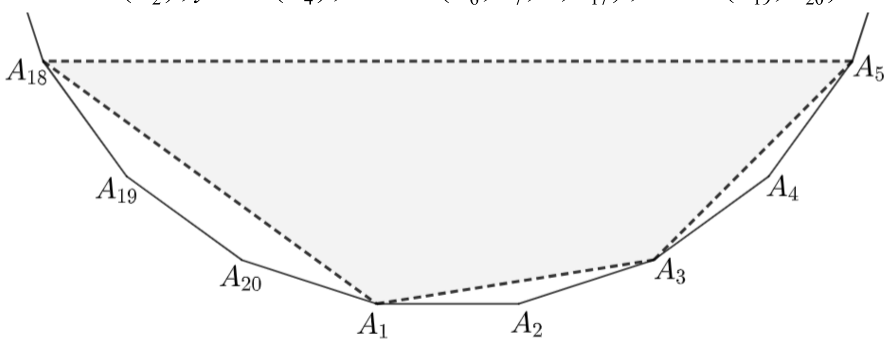
Második megoldás:

Összeszámoljuk azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek egyik csúcsa megegyezik a húszszög rögzített A_1 csúcsával, továbbá nincs közös oldaluk a húszszög oldalaival. Ha elindulunk pozitív körüljárási irányt követve valamely, a feltételeknek megfelelő négyszög oldalain az A_1 csúcstól kezdve, és minden oldalnál megszámoljuk, hogy a húszszögnek hány csúcsa található az oldalegyenes négyszöget nem tartalmazó partján, akkor olyan x, y, z, u pozitív egész számokat kapunk, amelyekre

(1) $$x + y + z + u = 16.$$

A 4. ábrán látható $A_1A_3A_5A_{18}$ négyszög esetén:

$$x = 1\ (A_2),\ y = 1\ (A_4),\ z = 12\ (A_6, A_7, ..., A_{17}),\ u = 2\ (A_{19}, A_{20}).$$



4. ábra

2 pont

Továbbá minden olyan pozitív egészekből álló (x, y, z, u) számnégyes, amelyben a tagok összege 16, meghatároz pontosan egy olyan négyszöget, amelynek nincs közös oldala a húszszög oldalaival, és az A_1 csúcstól kezdve a négyszög oldalegyenesei a húszszögből rendre x, y, z és u darab csúcsot „választanak le". Ebből adódóan az A_1 csúcsot tartalmazó négyszögből pontosan annyi van, ahány megoldása az (1) egyenletnek van a pozitív egészekből álló számnégyesek halmazán. 2 pont

A (1) egyenlet megoldásainak szemléltetéséhez tekintsünk egy 16 egység hosszú szakaszt, amelyet 1 egység hosszú részekre bontunk. A 16-ot annyiféleképpen lehet 4 pozitív egész szám összegére bontani, ahányféleképpen a szakasz 4 részre bontható a belső osztópontok segítségével. Ehhez a belső osztópontok közül 3-at kell kiválasztani, amit $\binom{15}{3} = 455$ -féleképpen tudunk megtenni. 2 pont

Eredményünk alapján a húszszög csúcsai közül 455-féleképpen tudunk kiválasztani olyan konvex négyszöget, amelynek egyik csúcsa a rögzített A_1 csúcs. Mivel a húszszög bármely csúcsát rögzíthetjük, ezért a négyszögek száma $455 \cdot 20 = 9100$. 2 pont

A fenti eredményben a négyszögeket többször is számoljuk. Valójában minden kiválasztott négyszög mind a négy csúcsa lesz rögzített helyen, azaz minden négyszöget 4-szer számolunk. Tehát a feltételeknek megfelelő négyszögek száma $\frac{9100}{4} = 2275.$ 2 pont

Összesen: 10 pont

2. a) Oldja meg a következő egyenletet a pozitív egész számpárok halmazán:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2},$$

ahol $1 \le x_1 < x_2$.

b) Melyek azok az $n \ge 3$ pozitív egész számok, amelyekre az

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{3}{2}$$

egyenletnek van páronként különböző pozitív egész számokból álló megoldása?

Első megoldás:

a)
A megoldást két esetre bontjuk.
I. eset:
Ha $x_1 = 1$, akkor

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2},$$

amelyből $x_2 = 2$. 1 pont

II. eset:
Ha $x_1 > 1$, akkor $x_2 > 2$, hiszen $x_1 < x_2$.
Ekkor

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

tehát nincs megoldása az egyenletnek.
Az egyenlet egyetlen megoldása: $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$. 2 pont

b)
Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy az egyenletnek minden $n \ge 3$ pozitív egész szám esetén van a feltételeknek megfelelő megoldása. 1 pont

Vizsgáljuk az egyenlet megoldhatóságát $n = 3$ esetén.
Az a) feladatrész megoldása alapján $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,
amelyből 3-mal való osztás után

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

A fenti egyenlőség mindkét oldalához 1-et hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{2}.$$

Így $n = 3$ esetén az egyenletnek van megoldása, például $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ és $x_3 = 6$. 1 pont

Tegyük fel, hogy az állítás valamely n-re igaz, azaz léteznek az $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ egész számok úgy, hogy

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{3}{2}.$$ 1 pont

Igazoljuk, hogy n + 1-re is van a feltételeknek megfelelő megoldás.
Elosztjuk a fenti egyenőség mindkét oldalát 3-mal:

$$\frac{1}{3a_1}+\frac{1}{3a_2}+\ldots+\frac{1}{3a_n}=\frac{1}{2},$$

majd hozzáadunk mindkét oldalhoz 1-et, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3a_1}+\frac{1}{3a_2}+\ldots+\frac{1}{3a_n}=\frac{3}{2}.$$ 2 pont

Az indukciós feltevés alapján a kapott egyenőség bal oldalán álló törtek nevezőjében lévő számok páronként különbözőek, így az $x_1=1<x_2=3a_1<x_3=3a_2<\ldots<x_{n+1}=3a_n$ számok az n + 1 ismeretlenes egyenlet egy megoldását adják. 1 pont

Tehát minden $n\geq 3$ pozitív egész szám esetén van a feltételeknek megfelelő megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

a)

Az egyenlet ekvivalens átalakítások után a

$$(3x_1-2)(3x_2-2)=4$$

alakban írható. 1 pont

Az $1\leq x_1<x_2$ feltételt figyelembe véve $0<3x_1-1<3x_2-1$, így a 4-nek egyetlen szorzattá bontása megfelelő, mégpedig $3x_1-2=1$ és $3x_2-2=4$. 1 pont

Az egyenlet egyetlen megoldása: $x_1=1$ és $x_2=2$. 1 pont

b)

Felhasználjuk, hogy minden pozitív egész n-re teljesül a következő összefüggés:

(1) $$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}.$$ 2 pont

Az azonosság a jobb oldalon álló törtek közös nevezőre hozásával egyszerűen bizonyítható, hiszen

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}.$$ 1 pont

Az a) feladatrész megoldása alapján $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Alkalmazzuk az (1) azonosságot a bal oldalon álló második törtre, így adódik, hogy

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{2}.$$

Így $n=3$ esetén az egyenletnek van megoldása, például $x_1=1$, $x_2=3$ és $x_3=6$. 1 pont

Folytassuk az eljárást, és alkalmazzuk ismét az (1) azonosságot a bal oldalon álló utolsó törtre, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{3}{2}.$$

Így $n = 4$ esetén az egyenletnek van megoldása.

Ha k darab 1 számlálójú tört összege $\frac{3}{2}$ és a nevezők szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást, akkor az (1) azonosság utolsó törtre vonatkozó alkalmazása után a törtek száma 1-gyel nő, a nevezők pedig továbbra is szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást, így a $\frac{3}{2}$ előállítható $k+1$ darab 1 számlálójú (páronként különböző) tört összegeként is. 2 pont

Tehát minden $n \geq 3$ pozitív egész szám esetén van a feltételeknek megfelelő megoldása az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Adott az O csúcsú 60°-os szögtartomány, és a belsejében egy P pont. A P pont szögszáraktól való távolságát jelölje a, illetve b.

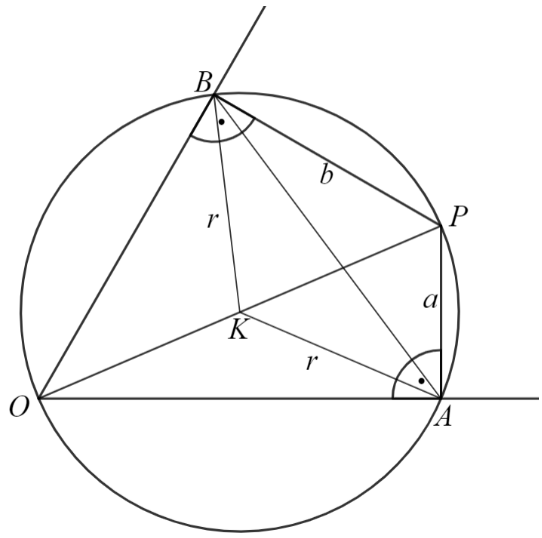
a) Fejezze ki az OP távolságot a és b függvényeként.

b) Bizonyítsa be, hogy végtelen sok olyan különböző pozitív a és b egész szám létezik, amelyekre az OP távolság is egy pozitív egész szám.

Megoldás:

a)

Ábrát készítünk a megoldáshoz, amelyen a P pontból a szögszárakra állított merőlegesek talppontját jelölje A és B.



Az $OAPB$ négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szögének összege 180°. 1 pont

A Thalész-tétel megfordítása miatt az $OAPB$ húrnégyszög köré írható kör K középpontja egybeesik az OP szakasz felezőpontjával. 1 pont

Az APB szög 120°-os, illetve a kerületi és középponti szögek tétele miatt az AKB szög nagysága szintén 120°. 1 pont

Felírjuk a koszinusztételt az APB, illetve az AKB háromszögekre. Ha az $OAPB$ négyszög köré írt kör sugarát r jelöli, akkor az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$AB^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 120°,$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120°.$$ 2 pont

Mivel $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, ezért a megfelelő algebrai átalakítások után az

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

összefüggéshez jutunk, amelyből az OP távolságot az a és b függvényeként az alábbi alakban kapjuk:

$$OP = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$ 1 pont

b)

Az OP távolságot jelölje c.

Elegendő bizonyítani, hogy léteznek a feltételt kielégítő a és b pozitív egész számok, hiszen ha egy (a, b) számpár esetén c értéke pozitív egész szám, akkor tetszőleges $k \geq 1$ egészre $(k \cdot a, k \cdot b)$ esetén is ugyanez teljesül. 1 pont

Az a) feladatrész eredményét felhasználva

$$c = 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}},$$

amelyből

$$c^2 = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{3}.$$

A kapott egyenlőséget rendezve és a jobb oldalon teljes négyzetet kialakítva kapjuk, hogy

$$3c^2 - 3b^2 = (2a + b)^2.$$

Mivel a bal oldalon álló kifejezés osztható 3-mal, ezért $3 | 2a + b$ is teljesül. *1 pont

Ha a és b különböző pozitív egészek, akkor elegendő $2a + b$ lehetséges értékeire (6; 9; 12; 15;…) ellenőrizni, hogy kapunk-e megoldást. Rövid számolás után kapjuk, hogy $2a + b = 15$ esetén az $a = 2$ és $b = 11$ értékek megfelelőek. *1 pont

Így minden $k \geq 1$ egészre $a = 2k$ és $b = 11k$ esetén az OP távolság pozitív egész szám. 1 pont

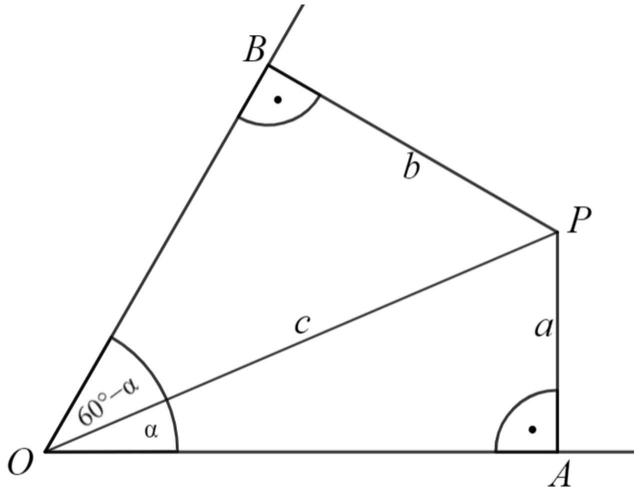
Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u> A csillaggal jelölt pontokat a versenyző akkor is megkaphatja, ha ellenőrzéssel együtt megad két olyan a és b pozitív egész számot, amelyre OP távolság is pozitív egész.

További megoldások az a) feladatrészre:

Második megoldás:

Ábrát készítünk a megoldáshoz, amelyen a P pontból a szögszárakra állított merőlegesek talppontját A és B, továbbá az AOP szöget α jelöli. Az OP szakasz hossza legyen c.



Ekkor a POB szög 60° – α. 1 pont

Az AOP és BOP derékszögű háromszögekben teljesül, hogy

(1) $$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$

illetve

(2) $$\sin(60° - \alpha) = \frac{b}{c}.$$ 1 pont

A (2) egyenlőség bal oldalán alkalmazva a két szög különbségének szinuszára vonatkozó addíciós-tételt:

(3) $$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{b}{c}.$$ 1 pont

Az (1) összefüggés alapján $\sin\alpha$ -t a (3)-ba behelyettesítve, majd $\cos\alpha$ -t kifejezve

(4) $$\cos\alpha = \frac{a+2b}{\sqrt{3}\cdot c}.$$ 1 pont

Felhasználva az (1) és a (4) egyenlőséget, valamint a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot, az alábbi egyenlőség adódik:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{(a+2b)^2}{3c^2} = 1.$$ 1 pont

Az egyenlőségből fejezzük ki c-t. Algebrai átalakítások után az

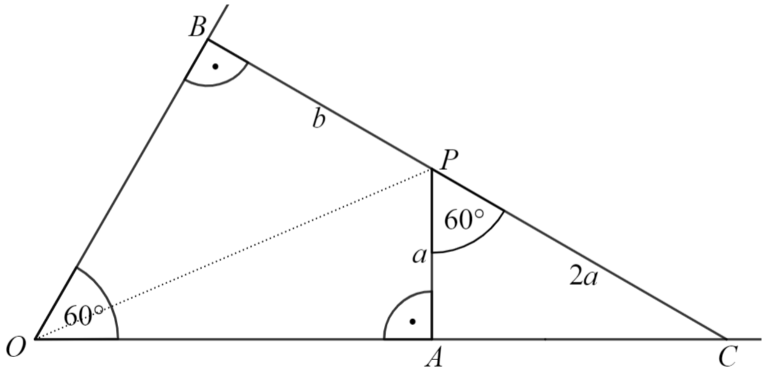
$$OP = c = 2\cdot\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

összefüggést kapjuk. 1 pont

Összesen: 6 pont

Harmadik megoldás:

Ábrát készítünk a megoldáshoz, amelyen a P pontból a szögszárakra állított merőlegesek talppontját jelölje A és B.



Jelölje az OA szögszár és a BP szakasz meghosszabbításának metszéspontját C. Ekkor az ACP (félszabályos) derékszögű háromszögben $PC = 2a$. 2 pont

A BOC háromszögben:

$$\mathrm{tg}60° = \frac{2a+b}{OB} = \sqrt{3},$$

amelyből $OB = \dfrac{2a+b}{\sqrt{3}}$. 2 pont

A BOP háromszögben Pitagorasz-tételt használva kapjuk, hogy $OP^2 = b^2 + OB^2$, amelyből algebrai átalakítások után az

$$OP = 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

összefüggés adódik. 2 pont

Összesen: 6 pont