OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\begin{cases} x+y^2=2 \\ x^2+y^6=2. \end{cases}$$

<u>Első megoldás:</u>

Figyelembe véve, hogy x és y egész számok, a második egyenletben a bal oldali összeg csak akkor lehet 2, ha $x^2=1$ és $y^6=1$. 4 pont

Ez négy esetet eredményez.

I. eset: $x=-1$ és $y=-1$.

Ekkor az első egyenlet ellentmondásra vezet, így ez nem megoldás. 1 pont

II. eset: $x=-1$ és $y=1$.

Ekkor az első egyenlet ellentmondásra vezet, így ez sem megoldás. 1 pont

III. eset: $x=1$ és $y=-1$.

Az adott számpár teljesíti az első egyenletet. 1 pont

IV. eset: $x=1$ és $y=1$.

Az adott számpár teljesíti az első egyenletet. 1 pont

Az egyenletrendszer megoldásai tehát $x_1=1$, $y_1=-1$, illetve $x_2=1$, $y_2=1$.

A kapott megoldáspárok valóban kielégítik az egyenletrendszert, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. <u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

Második megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük y^2-et: $y^2 = 2 - x$.

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe az $x^2 + (2-x)^3 = 2$ harmadfokú egyenlethez jutunk. 1 pont

A zárójel felbontása és rendezés után az $x^3 - 7x^2 + 12x - 6 = 0$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Megfelelő módon csoportosítva, majd szorzattá alakítva:

$$x^3 - x^2 - 6x^2 + 12x - 6 = 0,$$

$$x^2(x-1) - 6(x-1)^2 = 0,$$

$$(x-1)(x^2 - 6x + 6) = 0.$$

3 pont*

A szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, emiatt a következő két esetet vizsgáljuk:

1. eset: $x = 1$. 1 pont

Ekkor $y^2 = 2 - x$ miatt $y = -1$ vagy $y = 1$. 1 pont

2. eset: $x^2 - 6x + 6 = 0$. A kapott egyenletnek nincs egész megoldása. 1 pont

Az egyenletrendszer megoldásai tehát $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, illetve $x_2 = 1$, $y_2 = 1$.

A kapott megoldáspárok valóban kielégítik az egyenletrendszert, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. 2 pont

Összesen: 10 pont

Harmadik megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük x-et: $x = 2 - y^2$.

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe a $(2 - y^2)^2 + y^6 = 2$ hatodfokú egyenlethez jutunk. 1 pont

A zárójel felbontása és rendezés után az $y^6 + y^4 - 4y^2 + 2 = 0$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Megfelelő módon csoportosítva majd szorzattá alakítva:

$$y^6 - y^4 + 2y^4 - 4y^2 + 2 = 0,$$

$$y^4(y^2 - 1) + 2(y^2 - 1)^2 = 0,$$

$$(y^2 - 1)(y^4 + 2y^2 - 2) = 0.$$

3 pont*

A szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, emiatt a következő két esetet vizsgáljuk:

1. eset: $y^2 = 1$. Ekkor $y = -1$ vagy $y = 1$ az egyenlet megoldása, 1 pont

amelyből $x = 1$. 1 pont

2. eset: $y^4 + 2y^2 - 2 = 0$. A kapott egyenletnek nincs egész megoldása. 1 pont

Az egyenletrendszer megoldásai tehát $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, illetve $x_2 = 1$, $y_2 = 1$.

A kapott megoldáspárok valóban kielégítik az egyenletrendszert, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. 2 pont

Összesen: 10 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt három pontot kapja meg a versenyző, ha a helyes szorzatalakot bármilyen, jól indokolt módszerrel megkapja (pl. gyöksejtéssel és polinomosztással).*

2. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben az első három számjegy összege megegyezik a negyedik számjeggyel? Ilyen szám például az 1203.

Első megoldás:

A lehetőségeket a számok utolsó számjegye szerint csoportosítva számoljuk össze. Az 1-re végződő számok közül egyedül az 1001 felel meg a feltételeknek. 1 pont

A megfelelő 2-re végződő számok: 1012, 1102, 2002, tehát összesen 3 darab ilyen szám van. 1 pont

A továbbiakban a feltételeknek megfelelő négyjegyű számokat a számjegyek értékének megfelelő darabszámú + jelekkel, valamint az egyes helyiértékeken álló számjegyek elválasztására szolgáló | jelekkel írjuk le. Például az 1203 leírására a +|++||+++ jelsorozatot használjuk. A kapott jelsorozatban az első | jel előtt legalább 1 darab + jel van, továbbá az utolsó | jelet pontosan annyi + jel követ, amennyi az elválasztójel előtt van. Az ilyen jelsorozatok és a feltételeknek megfelelő számok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, ezért elegendő a jelsorozatok számát meghatározni. 2 pont

A 3-ra végződő számokat összesen 6 darab + jellel, és 3 darab | jellel lehet leírni. A jelsorozatok + jellel kezdődnek, és a |+++ jelekkel végződnek. Ezért 2 darab + jelet, és 2 darab | jelet kell sorba rendezni, így összesen $\binom{4}{2} = 6$ darab 3-ra végződő számot kapunk. 1 pont

Ha a négyjegyű szám utolsó számjegye k ($k \geq 3$), akkor összesen $k - 1$ darab + jelet, és 2 darab | jelet kell egymás mellé helyezni, ezért k-ra végződő számból összesen 1 pont

$\binom{k+1}{2}$ darab van. 1 pont

A keresett négyjegyű számok száma ezért

$$1+3+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{8}{2}+\binom{9}{2}+\binom{10}{2}=$$ 2 pont

$= 165.$ 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

A feltételeknek megfelelő számok utolsó számjegye megegyezik az első három számjegy összegével, ezért ez az összeg legfeljebb 9 lehet. 1 pont

A négyjegyű számokat az első megoldásban látott módszerhez hasonlóan ezúttal is + jelekkel és | jelekkel írjuk le, de ezúttal csak az első három számjegyet fogjuk megadni (ezek összege meghatározza a negyedik számjegyet).

Helyezzünk el 9 darab + jelet egymás mellé. A + jelek közé elhelyezzük a helyiértékek elválasztására szolgáló | jeleket. A négyjegyű szám első számjegye megegyezik az első elválasztójelig található + jelek számával, a második számjegy az első és a második elválasztójel közötti + jelek számával, a harmadik számjegy pedig a második és

harmadik | jelek közti + jelek számával. A szám utolsó számjegye a harmadik | jelig megtalálható + jelek számával egyenlő.
Például az 1203-nak megfelelő jelsorozat: +|++||++++++. 3 pont
Az első elválasztójel előtt legalább 1 darab + jelnek kell állnia (hiszen az első számjegy legalább 1). A leírt tulajdonságokkal rendelkező jelsorozatok, és a feltételeknek eleget tevő négyjegyű számok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, ezért elegendő a jelsorozatok számát meghatározni. 2 pont
A jelsorozatokban az első + jel helye rögzített, utána összesen 8 darab + jelet, valamint 3 darab | jelet kell sorba rendezni. 2 pont
Ebből adódóan a jelsorozatok, és így a megfelelő négyjegyű számok száma $\binom{11}{3} =$ 1 pont
$= 165.$ 1 pont
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a versenyző, ha rendezetten felsorolja a lehetséges négyjegyű számokat, és ez alapján helyesen válaszol.

3. Adott a valós számok halmazán az

$$f(x) = \frac{1}{|x-1| + 2 \cdot |x+3|}$$

hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény.
Határozza meg a függvény maximumát. Hol veszi fel a függvény ezt az értéket?

Első megoldás:

A nevezőben szereplő tagokat az abszolút érték definíciója szerint esetekre bontjuk:

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1), & \text{ha } x \le 1, \\ x-1, & \text{ha } x > 1; \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} -(x+3), & \text{ha } x \le -3, \\ x+3, & \text{ha } x > -3. \end{cases}$$

1 pont

1. eset: Ha $x \le -3$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{|x-1| + 2 \cdot |x+3|} = \frac{1}{-(x-1) - 2(x+3)} = \frac{1}{-3x-5} = \frac{-1}{3x+5}.$$ 1 pont

2. eset: Ha $-3 < x \le 1$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{|x-1| + 2 \cdot |x+3|} = \frac{1}{-(x-1) + 2(x+3)} = \frac{1}{x+7}.$$ 1 pont

3. eset: Ha $1 < x$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{|x-1| + 2 \cdot |x+3|} = \frac{1}{x-1+2(x+3)} = \frac{1}{3x+5}.$$ 1 pont

Tehát $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{3x+5}, & \text{ha } x\le -3, \\ \dfrac{1}{x+7}, & \text{ha } -3<x\le 1, \\ \dfrac{1}{3x+5}, & \text{ha } 1<x. \end{cases}$

Megvizsgáljuk az egyes tartományokon a függvény monotonitását.

1. eset: Ha $x\le -3$, akkor az *f* függvény egy olyan racionális törtfüggvénnyel egyenlő, amely a megadott tartományon szigorúan monoton növekedő. 1 pont

Így ezen a tartományon a függvény a maximumát az $x=-3$ helyen veszi fel, melynek értéke $f(-3)=\dfrac{1}{4}$. 1 pont

2. eset: Ha $-3<x\le 1$, akkor az *f* függvény egy olyan racionális törtfüggvénnyel egyenlő, amely a megadott tartományon szigorúan monoton csökkenő, 1 pont

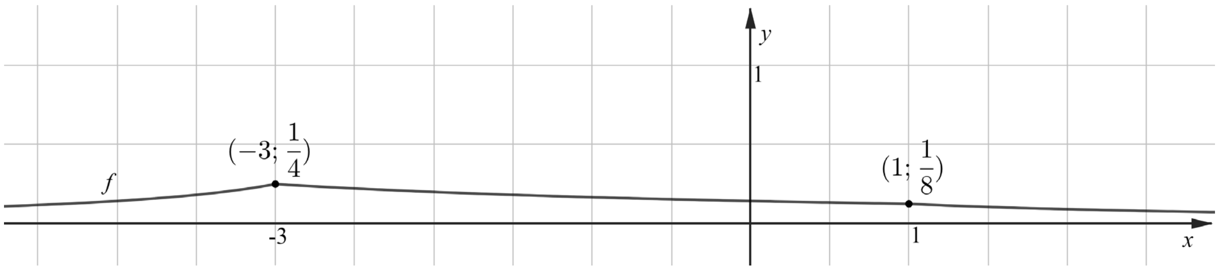
ezért értékeire itt teljesül, hogy $\dfrac{1}{8}\le f(x)<\dfrac{1}{4}$. 1 pont

3. eset: Ha pedig $x>1$, akkor az *f* függvény egy olyan racionális törtfüggvénnyel egyenlő, amely megadott tartományon szigorúan monoton csökkenő, ezért értékeire itt teljesül, hogy $0<f(x)<\dfrac{1}{8}$. 1 pont

Mindezek alapján a függvény maximumértéke $\dfrac{1}{4}$, amelyet az $x=-3$ helyen vesz fel. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:



Második megoldás:

Megvizsgáljuk az *f* függvény nevezőjében szereplő kifejezés értékkészletét, legyen $g(x)=|x-1|+2\cdot|x+3|$, $x\in\mathbf{R}$.

A *g* függvényben szereplő tagokat az abszolút érték definíciója szerint esetekre bontjuk:

$$|x-1|=\begin{cases} -(x-1), & \text{ha } x\le 1, \\ x-1, & \text{ha } x>1; \end{cases}$$

$$|x+3|=\begin{cases} -(x+3), & \text{ha } x\le -3, \\ x+3, & \text{ha } x>-3. \end{cases}$$

1 pont

1. eset: Ha $x \le -3$, akkor

$$g(x) = |x-1| + 2\cdot|x+3| = -(x-1) - 2(x+3) = -3x-5.$$ 1 pont

2. eset: Ha $-3 < x \le 1$, akkor

$$g(x) = |x-1| + 2\cdot|x+3| = -(x-1) + 2(x+3) = x+7.$$ 1 pont

3. eset: Ha $1 < x$, akkor

$$g(x) = |x-1| + 2\cdot|x+3| = x-1+2(x+3) = 3x+5.$$ 1 pont

Tehát $g(x) = \begin{cases} -3x-5, & \text{ha } x \le -3, \\ x+7, & \text{ha } -3 < x \le 1, \\ 3x+5, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$

Megvizsgáljuk az egyes tartományokon a függvény monotonitását:

1. eset: Ha $x \le -3$, akkor a g függvény egy szigorúan monoton csökkenő lineáris függvénnyel egyenlő, így g ezen a tartományon az $x = -3$ helyen veszi fel minimumát, melynek értéke $g(-3) = 4$. 1 pont

2. eset: Ha $-3 < x \le 1$, akkor a g függvény egy szigorúan monoton növekedő lineáris függvénnyel egyenlő, és így értékeire a megadott tartományon teljesül, hogy $4 < g(x) \le 8$. 1 pont

3. eset: Ha $x > 1$, akkor a g függvény egy szigorúan monoton növekedő lineáris függvénnyel egyenlő, és így értékeire a megadott tartományon teljesül, hogy $8 < g(x)$. 1 pont

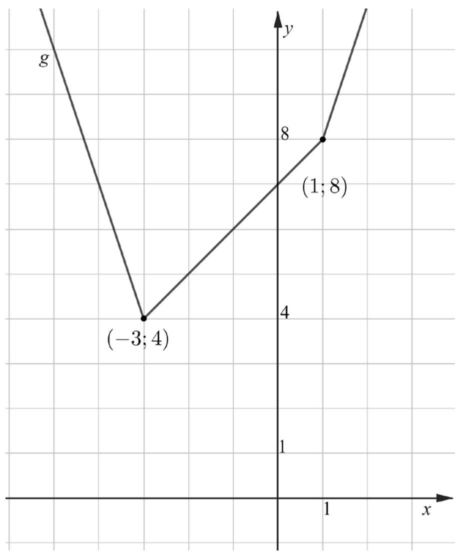
Tehát a g függvény minimumértéke 4, amelyet az $x = -3$ helyen vesz fel. 1 pont

Mivel $g(x) = |x-1| + 2\cdot|x+3| > 0$ minden valós x esetén (ugyanis a nevezőben szereplő két abszolútértékes kifejezés nem lehet egyszerre nulla), és $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, ezért az f függvény a maximumát ugyanott veszi fel, ahol a g függvény a minimumát. 1 pont

Ebből adódóan f maximumértéke $\dfrac{1}{4}$, amelyet az $x = -3$ helyen vesz fel. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:



4. Legyenek az A halmaz elemei azok a négyjegyű pozitív egész számok, amelyekre az alábbi két feltétel egyidejűleg teljesül:

   (1) pontosan hat pozitív osztójuk van,
   (2) prímosztóik összege 24.

   Az A halmaz elemei közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok szorzata egy pozitív egész szám harmadik hatványa?

<u>Megoldás:</u>

Ha egy számnak hat pozitív osztója van, akkor a prímtényezős felbontása p^5 vagy $p \cdot q^2$ ($p \neq q$ pozitív prímek) alakú. 1 pont

Ha a szám prímosztóinak összege 24, akkor legalább két különböző prímosztója van, ezért nem lehet p^5 alakú. 1 pont

Két különböző prímszám összege csak az alábbi esetekben 24:

$$5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13 = 24.$$ 1 pont

Az (1) és (2) feltételeket kielégítő számok:

$19 \cdot 5^2 = 475$, $5 \cdot 19^2 = 1805$, $17 \cdot 7^2 = 833$, $7 \cdot 17^2 = 2023$, $13 \cdot 11^2 = 1573$, $11 \cdot 13^2 = 1859$. 2 pont

Az A halmaz elemei négyjegyű számok, ezért $A = \{1573; 1805; 1859; 2023\}$. 1 pont

Az A halmaz elemei közül $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen tudunk kiválasztani kettőt, ezért összesen 6 eset van. 1 pont*

A kedvező esetben a két kiválasztott szám szorzata köbszám. Az A halmazban csak egyetlen ilyen számpár van, az 1573 és az 1859, tehát a kedvező esetek száma 1.

A szorzat $1573 \cdot 1859 = 11^2 \cdot 13^1 \cdot 13^2 \cdot 11 = 11^3 \cdot 13^3 = (11 \cdot 13)^3 = 143^3$ valóban köbszám. 2 pont*

A kérdezett valószínűség értéke a kedvező esetek és az összes eset számának hányadosa, azaz $\frac{1}{6}$. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző az alábbi gondolatmenetért is kapja meg:*

Ezek közül sorrendben $4 \cdot 3$-féleképpen tudunk kiválasztani kettőt, ezért összesen 12 eset van. 1 pont

A kedvező esetekben a két kiválasztott szám szorzata köbszám.

Az A halmazban csak egyetlen ilyen számpár van, az 1573 és az 1859, tehát a kedvező esetek száma 2, mivel ezeket kétféle sorrendben választhatjuk ki.

A szorzat $1573 \cdot 1859 = 11^2 \cdot 13^1 \cdot 13^2 \cdot 11 = 11^3 \cdot 13^3 = (11 \cdot 13)^3 = 143^3$ valóban köbszám. 2 pont

5. Jelölje a és b ($a \le b$) egy derékszögű háromszög befogóit, c az átfogóját. A háromszög oldalaira fennáll az $a^2 + c^2 = 3ab$ összefüggés.
Bizonyítsa be, hogy a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy az a oldal hossza mértani közepe az átfogóhoz tartozó magasság és súlyvonal hosszának.

Megoldás:

A Pitagorasz-tétel alapján
$$a^2 + b^2 = c^2,$$
amiből a feladat feltételét felhasználva a
$$2a^2 + b^2 = 3ab$$
összefüggéshez jutunk. 1 pont

A kapott egyenlet mindkét oldalát b^2-tel osztva ($b > 0$) a
$$2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 1 = 3 \cdot \frac{a}{b}$$
egyenletet kapjuk. 1 pont

Vezessük be az $\frac{a}{b} = y$ helyettesítést. Ekkor a
$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$
másodfokú egyenlethez jutunk, 1 pont

melynek gyökei $y_1 = 1$ és $y_2 = \frac{1}{2}$. 1 pont

Ha $y = 1$, akkor $a = b$ adódik, vagyis ebben az esetben a háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Ha $y = \frac{1}{2}$, akkor $b = 2a$. 1 pont

Ekkor a háromszög oldalai a, $2a$, illetve $\sqrt{5}a$. 1 pont

A Thalész-tétel megfordítása alapján a derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonal hossza megegyezik az átfogó hosszának felével, tehát $s_c = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. 1 pont

A derékszögű háromszög területére $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$, ahol m_c az átfogóhoz tartozó magasság hosszát jelöli, ezért $m_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$. 1 pont

Az átfogóhoz tartozó magasság és súlyvonal hosszának mértani közepére
$$G = \sqrt{m_c \cdot s_c} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = a,$$
amellyel igazoltuk a feladat állítását. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

A Pitagorasz-tétel alapján
$$a^2+b^2=c^2,$$
amiből a feladat feltételét felhasználva a
$$2a^2+b^2=3ab$$
összefüggéshez jutunk. 1 pont

A kapott egyenletet rendezés után szorzattá alakítjuk:
$$2a^2-2ab-ab+b^2=0,$$
$$(a-b)(2a-b)=0.$$
3 pont

Ha $a - b = 0$, akkor $a = b$, vagyis ebben az esetben a háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Ha $2a - b = 0$, akkor $b = 2a$. 1 pont

Ekkor a háromszög oldalai a, $2a$, illetve c. 1 pont

A Thalész-tétel megfordítása alapján a derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonal hossza megegyezik az átfogó hosszának felével, tehát $s_c=\frac{c}{2}$. 1 pont

A derékszögű háromszög a oldallal szemközti α szögére egyrészt $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, másrészt pedig $\sin\alpha=\frac{m_c}{2a}$, ahol m_c az átfogóhoz tartozó magasság hosszát jelöli, ezért

$m_c=\frac{2a^2}{c}$. 1 pont

Az átfogóhoz tartozó magasság és súlyvonal hosszának mértani közepére
$$G=\sqrt{m_c\cdot s_c}=\sqrt{\frac{2a^2}{c}\cdot\frac{c}{2}}=a,$$
amellyel igazoltuk a feladat állítását. 1 pont

Összesen: 10 pont

Harmadik megoldás:

A derékszögű háromszögben szokásos jelölések mellett $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$,

ezért $3ab=3c^2\sin\alpha\cos\alpha$, 1 pont

amiket az $a^2+c^2=3ab$ összefüggésbe helyettesítve a
$$c^2\sin^2\alpha+c^2=3c^2\sin\alpha\cos\alpha$$
egyenletet kapjuk. 1 pont

Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk c^2-tel ($c > 0$), így a
$$\sin^2\alpha+1=3\sin\alpha\cos\alpha$$
egyenlet adódik. 1 pont

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve és felhasználva, hogy $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, majd rendezve kapjuk, hogy
$$10\sin^4\alpha-7\sin^2\alpha+1=0.$$
1 pont

Az $y = \sin^2 \alpha$ helyettesítés bevezetésével a $10y^2 - 7y + 1 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei $y_1 = \frac{1}{2}$ és $y_2 = \frac{1}{5}$. 1 pont

Ha $y = \frac{1}{2}$, akkor $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$, amelyből $0° < \alpha < 90°$ miatt $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ebben az esetben $\alpha = 45°$, amiből már következik, hogy a háromszög egyenlő szárú. 1 pont
Ha $y = \frac{1}{5}$, akkor $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$, amelyből $0° < \alpha < 90°$ miatt $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ebben az esetben a háromszög oldalai a, $2a$, illetve $\sqrt{5}a$. 1 pont
A Thalész-tétel megfordítása alapján a derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonal hossza megegyezik az átfogó hosszának felével, tehát $s_c = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. 1 pont

A derékszögű háromszög területe $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$, ahol m_c az átfogóhoz tartozó magasság hosszát jelöli, ezért $m_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$. 1 pont
Az átfogóhoz tartozó magasság és súlyvonal hosszának mértani közepére

$$G = \sqrt{m_c \cdot s_c} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = a,$$

amellyel igazoltuk a feladat állítását. 1 pont

Összesen: 10 pont

6. Egy n oldalú szabályos sokszög minden csúcsához hozzárendeljük az 1, vagy a -1 számok valamelyikét. Ezt követően minden élre ráírjuk az adott él végpontjaihoz hozzárendelt számok szorzatát. Lehet-e az élekre írt számok összege 999, ha

a) $n = 2024$,

b) $n = 2023$?

<u>Első megoldás:</u>

a)

A sokszög minden élére kétféle szám kerülhet: 1 vagy -1, ezért ha a sokszög valamelyik élére írt szám előjele megváltozik, akkor az élekre írt számok összege 2-vel nő, vagy 2-vel csökken. 1 pont

Például, ha a sokszög A csúcsához rendelt szám előjelét megváltoztatjuk, miközben a többi csúcshoz rendelt számot változatlanul hagyjuk, akkor csak az A csúcshoz csatlakozó két élre írt szám előjele változik meg. Ebből következik, hogy ha egy csúcshoz rendelt szám előjelét megváltoztatjuk, akkor az élekre írt számok összege vagy 4-gyel nő, vagy 4-gyel csökken, vagy változatlan marad, így az összeg 4-gyel való osztási maradéka nem változik meg. 1 pont

Ha a sokszög minden csúcsához 1-et rendelünk, akkor minden élre 1 kerül, így az élekre írt számok összege 2024. 1 pont

Mivel 2024 osztható 4-gyel, ezért akárhány csúcshoz rendelt szám előjelét is változtatjuk meg, az élekre írt számok összege mindig osztható lesz 4-gyel. 1 pont

A 999 nem osztható 4-gyel, ezért az élekre kerülő számok összege nem lehet 999. 1 pont

b)

Megmutatjuk, hogy az élekre írt számok összege lehet 999. 1 pont

Ha az $A_1A_2A_3...A_{2023}$ szabályos sokszög minden csúcsához 1-et rendelünk, akkor az élekre írt számok összege 2023.

Mivel $2023 - 999 = 1024 = 4 \cdot 256$, ezért összesen 256 darab csúcshoz rendelt szám előjelét változtatjuk meg úgy, hogy minden egyes előjelváltáskor 4-gyel csökkenjen az élekre írt számok összege. 2 pont

Megváltoztatjuk például az $A_1, A_3, A_5, ..., A_{511}$ csúcsokhoz (összesen 256 darab csúcs) rendelt számokat 1-ről -1-re. Ekkor az $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{511}A_{512}$, valamint az $A_{2023}A_1$ élek mindegyikének pontosan az egyik végpontjánál változik meg a csúcshoz rendelt szám előjele, ezért a felsorolt 512 darab élre írt szám 1-ről -1-re változik, így az élekre írt számok összege 1024-gyel csökken, és végül valóban 999 lesz. <u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont