OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. Renáta feljegyezte egy tizenhat élű, hétpontú egyszerű gráf minden pontjának fokszámát, és megállapította, hogy a fokszámok között csak kétféle érték szerepel. Mi lehet ebben a gráfban a pontok fokszáma?

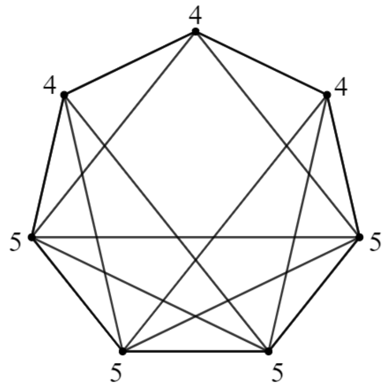
Megoldás:

A gráf fokszámainak összege 32, mivel az az élek számának kétszerese. 1 pont

Felírjuk rendezetten a lehetséges fokszámokat, majd megvizsgáljuk a gráf létezését. Ha a gráfban minden pont fokszáma kisebb 5-nél, akkor a fokszámok összege legfeljebb $7 \cdot 4 = 28$, ami nem lehetséges. Ebből következik, hogy a gráfban biztosan van olyan pont, aminek a fokszáma legalább 5. 1 pont

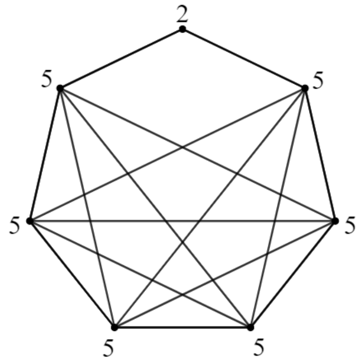
Ha a legnagyobb fokszám az 5, akkor a fokszámokat tekintve az alábbi esetek lehetségesek.

1. eset: Négy darab 5-ös és három darab 4-es. Ezekkel a fokszámokkal létezik gráf.



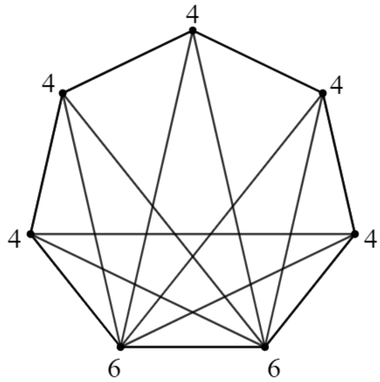
2 pont

2. eset: Hat darab 5-ös és egy darab 2-es. Ezekkel a fokszámokkal létezik gráf.



2 pont

Ha a legnagyobb fokszám a 6, a fokszámokat tekintve az alábbi esetek lehetségesek.
1. eset: Öt darab 6-os és két darab 1-es. Ezekkel a fokszámokkal nem létezik gráf, hiszen a 6-os fokszámú pontok miatt a fennmaradó két pont fokszáma minimum 5 lenne. 1 pont
2. eset: Két darab 6-os és öt darab 4-es. Ezekkel a fokszámokkal létezik gráf.



2 pont

Tehát a Renáta által feljegyzett fokszámok a következők lehettek:
négy darab 5-ös és három darab 4-es,
hat darab 5-ös és egy darab 2-es,
két darab 6-os és öt darab 4-es. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző szöveges indoklás nélkül felrajzolja a három megfelelő gráfot, valamint minden esetben jelöli a csúcsok fokszámát, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.

2. Hány olyan k pozitív egész szám van, amelyre az $A=\frac{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 10!}{k}$ kifejezés értéke négyzetszám?

Megoldás:

Az A kifejezés számlálójában lévő tényezőket rendre prímtényezőkre bontjuk:
$2!=2^1$, $3!=2^1\cdot 3^1$, $4!=2^3\cdot 3^1$, $5!=2^3\cdot 3^1\cdot 5^1$, $6!=2^4\cdot 3^2\cdot 5^1$,
$7!=2^4\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1$, $8!=2^7\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1$, $9!=2^7\cdot 3^4\cdot 5^1\cdot 7^1$, $10!=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^1$. 2 pont

A hatványozás azonossága alapján az azonos alapú hatványok szorzásakor a hatványkitevőket összeadjuk, ezért $A=\frac{2^{38}\cdot 3^{17}\cdot 5^7\cdot 7^4}{k}$. 1 pont

Az A kifejezés értéke pontosan akkor négyzetszám, ha a prímtényezős felbontásában minden hatványkitevő páros. 1 pont

Mivel az A kifejezés értéke egész szám, ezért a k szám osztója a számlálónak. Így a k szám prímosztói csak a 2, 3, 5 és 7 közül választhatók. 1 pont

Az A kifejezés számlálójában a 2 hatványkitevője páros szám, ezért azt vagy változatlanul hagyjuk, vagy páros számmal csökkenthetjük. Így a k prímtényezős felbontásában a 2 kitevője 0-tól 38-ig bármelyik páros szám lehet, ami 20 lehetőséget jelent. 1 pont

A 7 hatványkitevője is páros szám, így az előbbi gondolatmenet alapján a k számban a 7 kitevője 0, 2 vagy 4 lehet, ami 3 lehetőséget jelent. 1 pont

Az A kifejezés számlálójában a 3 hatványkitevője páratlan szám, ezért azt páratlan számmal kell csökkenteni, így a 3 kitevője 1-től 17-ig bármelyik páratlan szám lehet, ami 9 lehetőséget jelent. 1 pont

Az 5 hatványkitevője is páratlan szám, ezért a k számban az 5 kitevője 1, 3, 5 vagy 7 lehet, ami 4 lehetőséget jelent. 1 pont

A k szám prímtényezőinek hatványkitevőjét egymástól függetlenül választhatjuk, így összesen $20\cdot 9\cdot 4\cdot 3=2160$ olyan k pozitív egész szám létezik, amelyre az A kifejezés értéke négyzetszám. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Határozza meg azokat a p és q pozitív prímszámokat, amelyekre

$$\log_2(q-1)+\log_4(q+1)=1+3\log_8 p.$$

Megoldás:

Az egyenlőségben szereplő kifejezések minden pozitív p és q prímszám esetén értelmezettek. 1 pont

A logaritmus azonosságai segítségével átalakítjuk és rendezzük az egyenletet:

$$\log_2(q-1)+\frac{\log_2(q+1)}{2}=1+\log_2 p,$$

$$\log_2(q-1)^2+\log_2(q+1)=\log_2 4+\log_2 p^2,$$

$$\log_2\left[(q-1)^2\cdot(q+1)\right]=\log_2 4p^2.$$ 3 pont

A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

(1) $$(q-1)^2\cdot(q+1)=4p^2.$$ 1 pont

Mivel $(q-1)^2$ és $4p^2$ négyzetszámok, ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $q+1$ is négyzetszám. 2 pont*

Ha $q+1=n^2$, ahol $n\in\mathbf{Z}^+$ és $n\geq 2$, akkor $q=n^2-1=(n-1)(n+1)$. Mivel q prímszám és $n-1<n+1$, ezért ez csak $n-1=1$ és $n+1=q$ esetben teljesülhet, amelyből $q=3$ adódik. Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe kapjuk, hogy $p=2$. 2 pont*

Tehát az egyenlet megoldása a $p=2$ és a $q=3$ prímszámok. A kapott megoldás valóban kielégíti az egyenletet, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. 1 pont

Összesen: 10 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző az alábbi gondolatmenetek valamelyikéért is megkaphatja:*

I. A $(q-1)^2\cdot(q+1)=4p^2$ egyenlet jobb oldalán álló $4p^2$ páros szám, ezért $(q-1)^2\cdot(q+1)$ is páros, ami csak úgy lehetséges, ha q páratlan szám. 2 pont

Ebből adódóan viszont $8\,|\,(q-1)^2\cdot(q+1)$, amiből következik, hogy p^2 páros, így p is páros, tehát $p=2$. 1 pont

Ekkor viszont $(q-1)^2\cdot(q+1)=16$, amiből végül $q=3$ adódik. 1 pont

II. Az (1) egyenletet átalakítva kapjuk, hogy $(q-1)\cdot(q^2-1)=4p^2$. 1 pont

Ha $p=2$, akkor $q^2-1\,|\,16$, amelyből $q=3$ adódik. 1 pont

Ha $p>2$, akkor az egyenlet jobb oldalán szereplő kifejezésnek a $4p^2=2^2\cdot p^2$ felbontás miatt pontosan kilenc pozitív osztója van, és mivel $q-1<q^2-1$, ezért elegendő az alábbi felbontásokat megvizsgálni.

$q-1$	1	2	4	p
q^2-1	$4p^2$	$2p^2$	p^2	$4p$

A fenti felbontások egyikéből sem kapunk további megoldást. 2 pont

4. A Nekeresd Iskola n fős tizenegyedik évfolyamából
   - a szalagavató bál szervezésére a k tagú S,
   - a gólyatábor szervezésére a $k+1$ tagú G,
   - a ballagás szervezésére a $k+2$ tagú B

   csoportot kell kiválasztani úgy, hogy az évfolyam minden tanulója akár több csoport tagja is lehet ($3 \le k+2 \le n$). A G csoportot 4-szer annyiféleképpen lehet kialakítani, mint az S csoportot, míg a B csoportot $\frac{38}{3}$-szor annyiféleképpen lehet kialakítani, mint az S csoportot.

   Hányféleképpen választható ki 3 tanuló az n fős évfolyamból?

<u>Első megoldás:</u>

A feltételek alapján a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} \binom{n}{k+1} = 4\cdot\binom{n}{k} \\ \binom{n}{k+2} = \frac{38}{3}\cdot\binom{n}{k}, \end{cases}$$ 1 pont

amelyből

$$\begin{cases} \binom{n}{k+1} = 4\cdot\binom{n}{k} \\ \binom{n}{k+2} = \frac{19}{6}\cdot\binom{n}{k+1}. \end{cases}$$ 1 pont

A binomiális együtthatók felbontása után

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = 4\cdot\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\ \dfrac{n!}{(k+2)!\cdot(n-k-2)!} = \dfrac{19}{6}\cdot\dfrac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}. \end{cases}$$ 2 pont

Az első egyenletből a közös nevezővel való szorzás és egyszerűsítés után

$$n-k = 4(k+1),$$

(1) $$n = 5k+4.$$ 1 pont

A második egyenletből a közös nevezővel való szorzás és egyszerűsítés után

$$6(n-k-1) = 19(k+2)$$

egyenletet kapjuk, 1 pont

amelybe az (1) egyenletből n-et behelyettesítve

$$6(4k+3) = 19(k+2),$$

$$24k+18 = 19k+38.$$ 1 pont

Innen $k=4$, 1 pont

amelyből $n = 5\cdot 4 + 4 = 24$, tehát 24 fős az évfolyam. 1 pont

A kapott n és k teljesíti a feladat feltételeit, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. A 24 fős évfolyamból három tanulót $\binom{24}{3} = 2024$-féleképpen lehet kiválasztani. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Az S csoport kialakításainak száma legyen x ($x \in \mathbf{Z}^+$). Ekkor a feltételek alapján a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} \binom{n}{k} = x \\ \binom{n}{k+1} = 4x \\ \binom{n}{k+2} = \frac{38}{3}x. \end{cases}$$

1 pont

A binomiális együtthatók felbontása után

$$\begin{cases} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = x \\ \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = 4x \\ \frac{n!}{(k+2)!\cdot(n-k-2)!} = \frac{38}{3}x. \end{cases}$$

1 pont

Az első egyenlet bal oldalán álló hányadost a második egyenletben x helyére írva:

$$\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = 4\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

1 pont

amelyből a közös nevezővel való szorzás és egyszerűsítés után

$$n-k = 4(k+1),$$

(1) $$n = 5k+4.$$

1 pont

A kapott egyenletrendszer első egyenletének bal oldalán álló hányadost a harmadik egyenletben x helyére írva:

$$\frac{n!}{(k+2)!\cdot(n-k-2)!} = \frac{38}{3}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

1 pont

amelyből a közös nevezővel való szorzás és egyszerűsítés után

$$3(n-k)(n-k-1) = 38(k+1)(k+2).$$

1 pont

Az (1) egyenletből n-et behelyettesítve, majd a bal oldalon 4-et kiemelve

$$12(k+1)(4k+3) = 38(k+1)(k+2).$$

Az egyenlet mindét oldalát a pozitív $2(k+1)$-gyel osztva

$$24k + 18 = 19k + 38.$$

1 pont

Innen $k = 4$, 1 pont

amelyből $n = 5\cdot 4 + 4 = 24$, tehát 24 fős az évfolyam. 1 pont

A kapott n és k teljesíti a feladat feltételeit, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. A 24 fős évfolyamból három tanulót $\binom{24}{3} = 2024$-féleképpen lehet kiválasztani. 1 pont

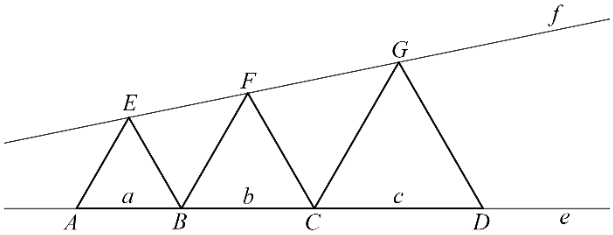
Összesen: 10 pont

5. Adott a síkon az e és az f egyenes, valamint az ábrának megfelelően az ABE, BCF, CDG szabályos háromszög ($A, B, C, D \in e$ és $E, F, G \in f$), ahol a háromszögek oldalai rendre a, b és c ($a < b < c$).

   a) Igazolja, hogy $b^2 = ac$.

   b) Igazolja, hogy az a, b és c oldalakból pontosan akkor szerkeszthető háromszög, ha

$$1 < \frac{c}{a} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$



Megoldás:

a)

A BEF háromszögben $EBF\sphericalangle = 60°$. Legyen $EFB\sphericalangle = \alpha$, ekkor $BEF\sphericalangle = 120° - \alpha$.
A CFG háromszögben $FCG\sphericalangle = 60°$, $CFG\sphericalangle = 120° - \alpha$, így $FGC\sphericalangle = \alpha$. 1 pont

A BEF és CFG háromszögek szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlók egymáshoz. 1 pont

A háromszögek hasonlóságából következik, hogy megfelelő oldalainak aránya megegyezik, ezért

$$\frac{BF}{BE} = \frac{CG}{CF},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b},$$

amiből $b^2 = ac$ adódik. 2 pont

b)

Az a, b és c oldalakból pontosan akkor szerkeszthető háromszög, ha a két rövidebb oldal hosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál, tehát

$$c < a + b.$$ 1 pont

Az a) feladat eredménye alapján a fenti egyenlőtlenség alábbi ekvivalens alakjait kapjuk:

$$c < a + \sqrt{ac},$$

$$c - a < \sqrt{ac}.$$

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív kifejezés áll, ezért mindkét oldalt négyzetre emelve adódik, hogy

$$c^2 - 2ac + a^2 < ac,$$

$$c^2 - 3ac + a^2 < 0.$$ 1 pont

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív a^2-tel osztva előbb a

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 3\cdot\frac{c}{a} + 1 < 0,$$

majd az $y = \frac{c}{a}$ helyettesítés után az

$$y^2 - 3y + 1 < 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

Ennek megoldása

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < y < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Mivel $y = \frac{c}{a} > 1 > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, ezért azt kapjuk, hogy

$$1 < \frac{c}{a} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$ 2 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, így a feladat állítását igazoltuk. 1 pont

Összesen: 10 pont