OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(szakgimnázium, technikum)

Javítási-értékelési útmutató

1. Adott az (a_n) nem állandó számtani sorozat $(n \in \mathbf{N}^+)$, és a valós számok halmazán az $f(x) = x^3 + a_4x^2 + a_{20}x + a_1$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény. Az f függvény zérushelyei a_9, a_{10} és a_{11}. Adja meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját.

<u>Első megoldás</u>:

Az f függvény zérushelyei a_9, a_{10} és a_{11}, így

$$(1) \quad a_9^3 + a_4 \cdot a_9^2 + a_{20} \cdot a_9 + a_1 = 0$$

$$(2) \quad a_{10}^3 + a_4 \cdot a_{10}^2 + a_{20} \cdot a_{10} + a_1 = 0$$

$$(3) \quad a_{11}^3 + a_4 \cdot a_{11}^2 + a_{20} \cdot a_{11} + a_1 = 0.$$

1 pont

A (2) és (1), illetve a (3) és (2) egyenletek különbségéből, felhasználva az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ és az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosságokat a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} (a_{10}-a_9)\cdot(a_{10}^2 + a_{10}\cdot a_9 + a_9^2) + a_4\cdot(a_{10}-a_9)\cdot(a_{10}+a_9) + a_{20}\cdot(a_{10}-a_9) = 0 \\ (a_{11}-a_{10})\cdot(a_{11}^2 + a_{11}\cdot a_{10} + a_{10}^2) + a_4\cdot(a_{11}-a_{10})\cdot(a_{11}+a_{10}) + a_{20}\cdot(a_{11}-a_{10}) = 0. \end{cases}$$

2 pont

Ha az (a_n) sorozat differenciáját d jelöli, akkor $a_{10} - a_9 = a_{11} - a_{10} = d \neq 0,$ így a kapott egyenletek mindkét oldalát d-vel osztva

$$(4) \quad \begin{cases} a_{10}^2 + a_{10}\cdot a_9 + a_9^2 + a_4\cdot(a_{10}+a_9) + a_{20} = 0 \\ a_{11}^2 + a_{11}\cdot a_{10} + a_{10}^2 + a_4\cdot(a_{11}+a_{10}) + a_{20} = 0. \end{cases}$$

1 pont

A második és az első egyenlet különbségéből

$$(a_{11}-a_9)\cdot(a_{11}+a_9) + a_{10}\cdot(a_{11}-a_9) + a_4\cdot(a_{11}-a_9) = 0.$$

1 pont

Az $a_{11} - a_9 = 2d \neq 0$, ezért a kapott egyenlet mindkét oldalát $(2d)$-vel osztva

$$a_{11} + a_9 + a_{10} + a_4 = 0,$$

$$a_1 + 10d + a_1 + 8d + a_1 + 9d + a_1 + 3d = 0,$$

$$4a_1 + 30d = 0,$$

amiből $a_1 = -\dfrac{15}{2}d.$

2 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

A kapott összefüggés alapján

$a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{2}d, \quad a_9 = a_1 + 8d = \frac{1}{2}d, \quad a_4 = a_1 + 3d = -\frac{9}{2}d, \quad a_{20} = a_1 + 19d = \frac{23}{2}d.$

A (4) egyenletrendszer első egyenletének felhasználásával

$$\left(\frac{3}{2}d\right)^2 + \frac{3}{2}d \cdot \frac{1}{2}d + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}d\right)\cdot\left(\frac{3}{2}d + \frac{1}{2}d\right) + \frac{23}{2}d = 0,$$

$$-\frac{23}{4}d^2 + \frac{23}{2}d = 0.$$ 1 pont

A kapott másodfokú egyenlet gyökei közül a $d = 0$ nem megoldás. Ha $d = 2$, akkor pedig a sorozat első tagja $a_1 = -\frac{15}{2} \cdot 2 = -15.$ 1 pont

Tehát a sorozat első tagja –15, differenciája 2, amelyekkel teljesül a feladat minden feltétele. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

Az $x^3 + a_4x^2 + a_{20}x + a_1 = 0$ harmadfokú egyenlet gyökei a_9, a_{10} és a_{11}, ezért az egyenletre felírva a következő Viète-formulákat az alábbi összefüggéseket kapjuk:

(1) $a_9 + a_{10} + a_{11} = -a_4$

(2) $a_9a_{10} + a_9a_{11} + a_{10}a_{11} = a_{20}.$ 2 pont

Az (1) összefüggésből az a_9 és a sorozat d differenciája segítségével kifejezve a sorozat többi tagját adódik, hogy

$$3a_9 + 3d = -a_9 + 5d,$$

amiből

(3) $2a_9 = d.$ 2 pont

Az a_9 és d segítségével kifejezve a sorozat többi tagját a (2) egyenlőségből adódik, hogy

$$a_9(a_9 + d) + a_9(a_9 + 2d) + (a_9 + d)(a_9 + 2d) = a_9 + 11d,$$ 1 pont

amiből a (3) felhasználásával

$$a_9 \cdot 3a_9 + a_9 \cdot 5a_9 + 3a_9 \cdot 5a_9 = 23a_9,$$

$$23a_9^2 - 23a_9 = 0.$$ 1 pont

A kapott másodfokú egyenlet gyökei közül az $a_9 = 0$ nem ad megoldást, hiszen ekkor a (3) alapján a differencia is 0, így a sorozat állandó. 1 pont

Ha $a_9 = 1$, akkor $d = 2$, 1 pont

amiből a sorozat első tagja $a_1 = 1 - 8 \cdot 2 = -15.$ 1 pont

Tehát a sorozat első tagja –15, differenciája 2, amelyekkel teljesül a feladat minden feltétele. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A (2) összefüggés helyett a gyökök szorzatára vonatkozó $a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} = -a_1$ *Viète-formulát is alkalmazhatjuk.*

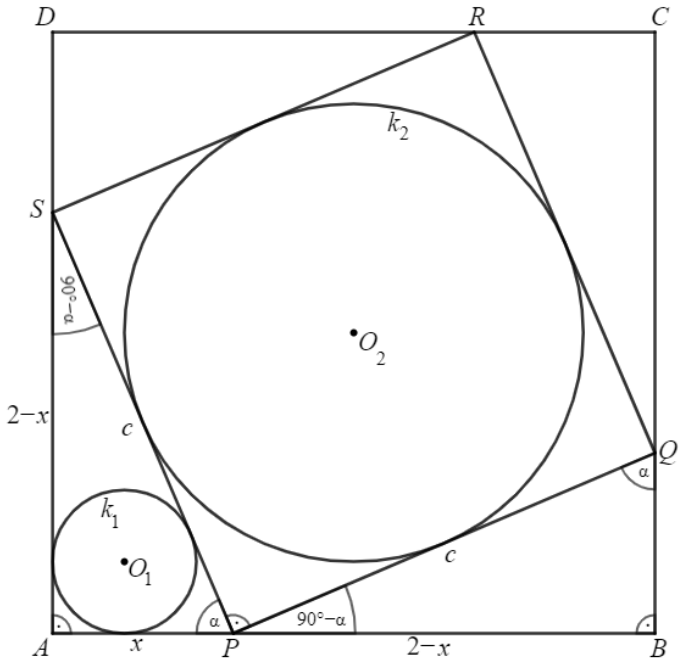
2. Adott a 2 egység oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet. A négyzet AB, BC, CD és DA oldalain rendre felvesszük a P, Q, R és S pontokat úgy, hogy a $PQRS$ négyszög négyzet legyen. Jelölje k_1 az APS háromszög, k_2 a $PQRS$ négyzet beírt körét.

a) Bizonyítsa be, hogy a k_1 és a k_2 körök kerületének összege nem függ a P, Q, R és S pontok helyzetétől.

b) Bizonyítsa be, hogy a k_1 kör középpontja illeszkedik a $PQRS$ négyzet köré írható körére.

Első megoldás:

a)
Ábrát készítünk a feladathoz. Jelölje a k_1 kör középpontját O_1, a k_2 kör középpontját O_2, az AP szakasz hosszát x, a $PQRS$ négyzet oldalát c, valamint az $APS\sphericalangle$-et α. Ekkor $BP = 2 - x$, $ASP\sphericalangle = BPQ\sphericalangle = 90° - \alpha$, továbbá $BQP\sphericalangle = \alpha$.



Az ASP és a BPQ derékszögű háromszögek átfogója és szögei páronként megegyeznek, ezért a két háromszög egybevágó. Ebből adódóan $AS = BP = 2 - x$. 1 pont

A $PQRS$ négyzet beírt körének sugara $r_2 = \dfrac{c}{2}$. 1 pont

Az a, b befogójú, c átfogójú derékszögű háromszög beírt körének r sugarára

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

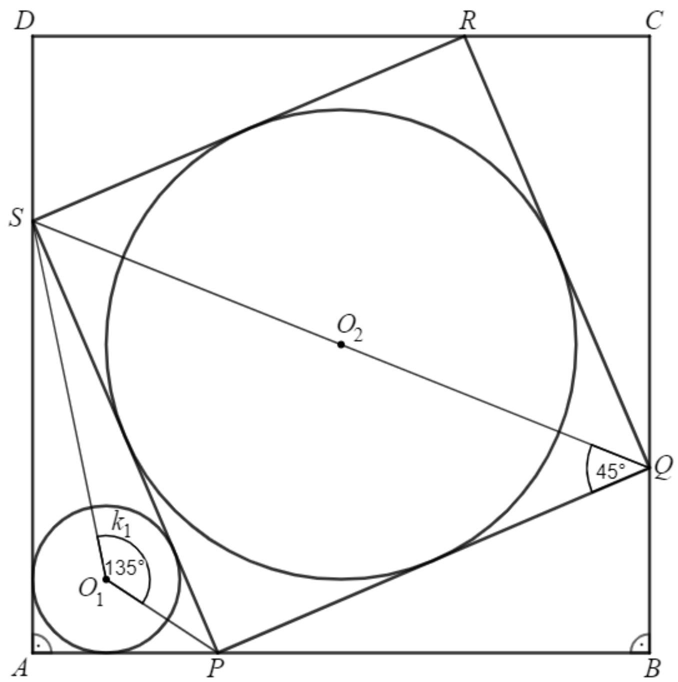
ezért ha a k_1 kör sugarát r_1 jelöli, akkor

$$r_1 = \frac{x+(2-x)-c}{2} = 1 - \frac{c}{2}.$$ 2 pont

A k_1 és a k_2 körök sugarának összege $r_1 + r_2 = 1 - \dfrac{c}{2} + \dfrac{c}{2} = 1$, ezért a két kör kerületének összege 2π, ami valóban független a P, Q, R és S pontok helyzetétől. 2 pont

b)
A k_1 kör O_1 középpontja illeszkedik az APS háromszög belső szögfelezőire, ezért $SPO_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ és $PSO_1\sphericalangle = \frac{90° - \alpha}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}$, 1 pont

amiből következik, hogy $SO_1P\sphericalangle = 135°$. 1 pont



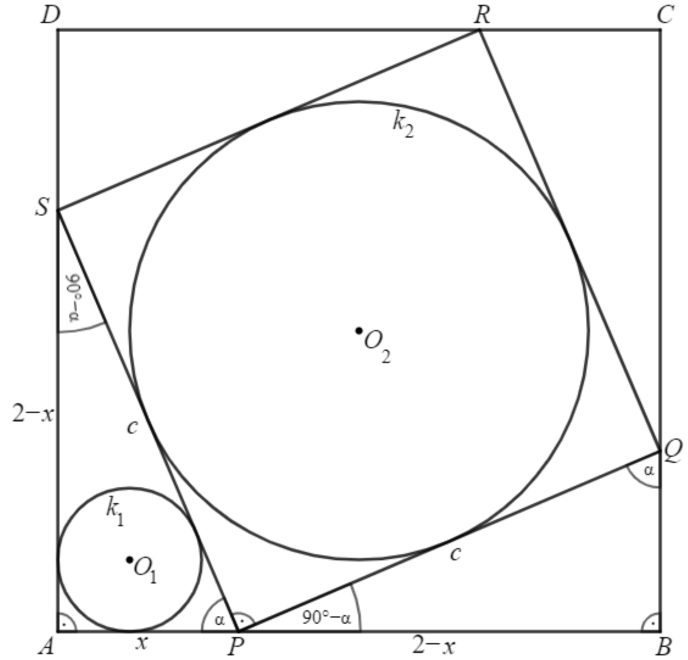
Az $SQP\sphericalangle = 45°$, ezért a $PQSO_1$ négyszögben a Q és O_1 csúcsoknál lévő szemközti szögek összege 180°, így a négyszög húrnégyszög. 1 pont

Egy kört három pontja egyértelműen meghatározza, ezért a PQS háromszög és a $PQRS$ négyzet körülírt köre megegyezik, így az O_1 pont valóban illeszkedik a $PQRS$ négyzet köré írható körére. 1 pont

Összesen: 10 pont

Második megoldás:

a)
Ábrát készítünk a feladathoz. Jelölje a k_1 kör középpontját O_1, a k_2 kör középpontját O_2, az AP szakasz hosszát x, a $PQRS$ négyzet oldalát c, valamint az $APS\sphericalangle$-et α. Ekkor $BP = 2 - x$, $ASP\sphericalangle = BPQ\sphericalangle = 90° - \alpha$, továbbá $BQP\sphericalangle = \alpha$.



Az ASP és a BPQ derékszögű háromszögek átfogója és szögei páronként megegyeznek, ezért a két háromszög egybevágó. Ebből adódóan $AS = BP = 2 - x$. 1 pont

A $PQRS$ négyzet beírt körének sugara $r_2 = \frac{c}{2}$. 1 pont

A háromszög beírt körének sugara a háromszög területének és félkerületének hányadosa, ezért a k_1 kör r_1 sugarára

$$r_1 = \frac{\frac{x\cdot(2-x)}{2}}{\frac{x+2-x+c}{2}} = \frac{x\cdot(2-x)}{c+2}.$$ 1 pont

A k_1 és a k_2 körök sugarának összege

$$(1) \quad r_1 + r_2 = \frac{x\cdot(2-x)}{c+2} + \frac{c}{2} = \frac{4x-2x^2+c^2+2c}{2c+4}.$$ 1 pont

Az ASP derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján

$$c^2 = x^2 + (2-x)^2,$$

amiből a zárójel felbontása és összevonás után adódik, hogy

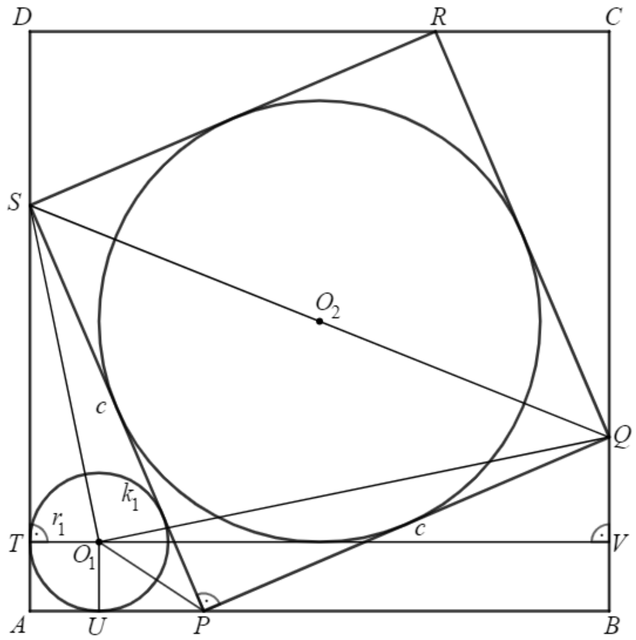
$$c^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$ 1 pont

A kapott eredményt az (1) összefüggésbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$r_1 + r_2 = \frac{4x-2x^2+(2x^2-4x+4)+2c}{2c+4} = \frac{2c+4}{2c+4} = 1,$$

ezért a két kör kerületének összege 2π, ami valóban független a P, Q, R és S pontok helyzetétől. 1 pont

b)
Ábrát készítünk a feladathoz, amelyen jelölje a k_1 kör AP, illetve AS oldalon lévő érintési pontját U, illetve T, míg a TO_1 egyenes és a BC oldal metszéspontját V.



Az így kialakult O_1ST és QO_1V háromszögek derékszögűek, továbbá az O_1T, O_1U, AT, AU és VB szakaszok hossza megegyezik a k_1 kör r_1 sugarával.
A Pitagorasz-tételt alkalmazva az SO_1T háromszögben azt kapjuk, hogy

$$SO_1^2 = (SA - r_1)^2 + r_1^2,$$

illetve a QO_1V háromszögben

$$QO_1^2 = (QB - r_1)^2 + (2 - r_1)^2.$$ 1 pont

A kapott két egyenőség megfelelő oldalait összeadva, a kijelölt műveletek és összevonások elvégzése, valamint kiemelés után adódik, hogy

$$SO_1^2 + QO_1^2 = SA^2 + QB^2 - 2(SA + QB) \cdot r_1 + 4r_1^2 - 4r_1 + 4.$$

Az a) részfeladat eredményei alapján $AP = QB$ és $SA + AP = 2$, valamint a PSA derékszögű háromszögben $SA^2 + AP^2 = c^2$, ezért

$$SO_1^2 + QO_1^2 = c^2 + 4r_1^2 - 8r_1 + 4,$$

$$SO_1^2 + QO_1^2 = c^2 + (2 - 2r_1)^2.$$ 2 pont

Szintén az a) feladatrészben igazoltuk, hogy $r_1 + r_2 = 1$, így

$$SO_1^2 + QO_1^2 = c^2 + (2r_2)^2.$$

A $PQRS$ négyzet oldalának és beírt köre átmérőjének hossza megegyezik, ezért azt kapjuk, hogy

$$SO_1^2 + QO_1^2 = 2c^2,$$

$$SO_1^2 + QO_1^2 = \left(\sqrt{2} \cdot c\right)^2,$$

$$SO_1^2 + QO_1^2 = SQ^2.$$

Pitagorasz tételének megfordítása alapján az SQO_1 háromszög derékszögű, ezért az O_1 pont illeszkedik az SQ szakasz Thalész-körére. Ez a kör egybeesik a $PQRS$ négyzet köré írható körével, így a feladat állítását bebizonyítottuk. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Adott az alábbi, pozitív egész számokat tartalmazó táblázat.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 4 & & 3 & \\ 4 & & 7 & & 7 & & 4 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

A táblázat n-edik sorában n darab szám áll $(n \geq 1)$, a sor első és utolsó eleme n. A harmadik sortól kezdve a sor többi eleme megegyezik az előző sorban közvetlenül az elem felett álló két szám összegével. Jelölje s_n a táblázat n-edik sorában álló számok összegét ($s_1 = 1$, $s_2 = 4$, $s_3 = 10$).

a) Adja meg s_n értékét n függvényében.

b) Melyek azok az $n \geq 3$ egész számok, amelyekre s_n négyzetszám?

c) Adja meg az (s_n) sorozat tagjainak kettes számrendszerbeli alakját.

Megoldás:

a)
Legyenek a táblázat n-edik sorának elemei $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,a_{n-1},\ a_n$, így $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
A táblázat n + 1-edik sorának elemei ekkor $a_1 + 1,\ a_1 + a_2,\ \ldots\ ,a_{n-1} + a_n,\ a_n + 1$, így

$$(1) \quad s_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 2 = 2s_n + 2.$$ 2 pont

Az (s_n) sorozat első néhány tagját vizsgálva megfigyelhetjük, hogy:

$$s_2 - s_1 = 3,$$
$$s_3 - s_2 = 3 \cdot 2,$$
$$s_4 - s_3 = 3 \cdot 2^2,$$
$$\ldots$$
$$s_n - s_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}.$$

A kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva

$$s_n - s_1 = 3 \cdot (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}),$$
$$s_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2.$$

1 pont

A sejtést teljes indukcióval igazoljuk:
1. Az állítás a sorozat első tagjára igaz, mert $s_1 = 3 \cdot 2^{1-1} - 2 = 1$.
2. Tegyük fel, hogy a sorozat n-edik tagjára teljesül az $s_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ indukciós feltétel.
3. Az öröklődést a sorozat n + 1-edik tagjára a rekurzív képletet és az indukciós feltételt felhasználva igazoljuk:

$$s_{n+1} = 2 \cdot s_n + 2 = 2 \cdot (3 \cdot 2^{n-1} - 2) + 2 = 3 \cdot 2^n - 2.$$

Tehát a sejtés igaz, vagyis a sorozat n-edik tagja $s_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$. 2 pont

b)
Az a) feladatrész (1) összefüggése alapján $n \geq 2$ esetén az (s_n) sorozat tagjai páros számok, ezért az $s_{n+1} = 2s_n + 2$ képlet alapján $n \geq 3$ esetén a sorozat minden tagja 4-gyel osztva 2 maradékot ad. 1 pont
Bármely négyzetszám 4-es maradéka 0 vagy 1 lehet, ezért nem létezik olyan $n \geq 3$ egész szám, amelyre az s_n négyzetszám. 1 pont

c)

A sorozat első tagja $s_1 = 1$ kettes számrendszerben is 1.

A kettes számrendszerben a kettővel való szorzás ugyanúgy viselkedik, mint a tízes számrendszerben a tízzel való szorzás, vagyis a szám végére egy 0 kerül. Ha egy tízes számrendszerbeli számhoz 2-t hozzáadunk, akkor annak a kettes számrendszerbeli alakjához 10_2-t kell hozzáadni.

Tehát $s_2 = 10_2 + 10_2 = 100_2$, illetve $s_3 = 1000_2 + 10_2 = 1010_2$. 1 pont

A második tagtól kezdve az (s_n) sorozat minden tagjának kettes számrendszerbeli alakja 0-ra végződik. A fenti műveletsor eredményeképpen s_n egy olyan $n + 1$ jegyű szám, amelyben az 1-es helyiértékén 0, az előtte lévő $n - 2$ helyiértéken 1-es áll, a szám első két számjegye pedig 10, tehát s_n kettes számrendszerbeli alakja

$$s_n = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 1 \\ 10\underbrace{11...1}_{n-2\,\text{db}}0, \text{ ha } n > 1. \end{cases}$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

Az a) feladatrész megoldható a következőképpen is:

A sorozat rekurzív képlete $n \geq 2$ *esetén* $s_n + 2 = 2(s_{n-1} + 2)$ *alakba írható.*

Felírjuk a fenti összefüggést az n-ediktől az első tagig visszafelé:

$$\begin{aligned} s_n + 2 &= 2(s_{n-1} + 2), \\ s_{n-1} + 2 &= 2(s_{n-2} + 2), \\ &\dots \\ s_3 + 2 &= 2(s_2 + 2), \\ s_2 + 2 &= 2(s_1 + 2). \end{aligned}$$

Mivel minden egyenlőség mindkét oldalán pozitív kifejezés áll, ezért a megfelelő oldalakat összeszorozva, majd az egyenlő tényezőkkel osztva kapjuk, hogy

$$s_n + 2 = 2^{n-1}(s_1 + 2) = 2^{n-1}(1 + 2).$$

Ebből a sorozat n-edik tagja $s_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

A b) feladatrészben a rekurziós képlet helyett az $s_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ *összefüggés is használható.*