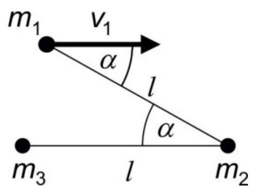
A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

FIZIKA

I. KATEGÓRIA

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat. Három azonos méretű, pontszerűnek tekinthető, m_1, m_2, m_3 tömegű test nyugszik vízszintes sima síkon. Az m_1 és az m_2 tömegű test, továbbá az m_2 és az m_3 tömegű test vékony, rugalmasnak és nyújthatatlannak tekinthető, l hosszúságú fonállal van összekötve, kezdetben a két fonál α szöget zár be egymással ($0 < \alpha < 90°$). Az ábrának megfelelő módon az m_1 tömegű testet elindítjuk v_1 sebességgel. A $\vec{v}_1$ sebességvektor párhuzamos az m_3 és az m_2 testet összekötő fonállal.

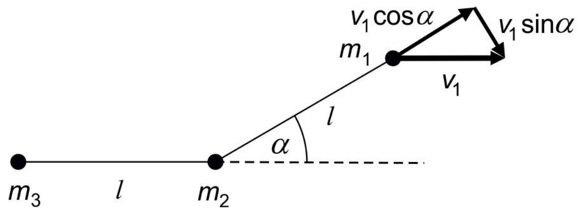


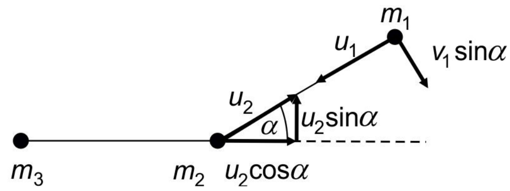
a) Mekkora legyen az α szög, hogy az m_3 tömegű test $v_3 = \frac{v_1}{2}$ nagyságú sebességgel induljon el, ha $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 2m$?

b) Határozzuk meg az egyes testek impulzusvektorának nagyságát és irányát a harmadik test indulása utáni pillanatban az a) részben kapott α szög esetén!

Megoldás. *a)* Az 1-es test v_1 sebességgel halad mindaddig, amíg a fonál meg nem feszül. Ebben a helyzetben a két fonál ($180° - \alpha$) szöget zár be egymással. Amikor a fonál megfeszül, akkor az m_1 és a m_2 tömegű testek között, mivel a fonál csak fonálirányú erőlökést tud létrehozni, fonálirányban tökéletesen rugalmas ütközés jön létre. A testek fonálra merőleges impulzuskomponensei nem változnak.

Fonálirányban az m_1, m_2 tömegű testek között lezajló „ütközés” utáni sebességeket az impulzus- és az energiamegmaradás törvényeiből kapjuk.
Bontsuk fel v_1-et kötélirányú és a kötélre merőleges irányú komponensekre!





$$m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 \cdot 0 = m_1 u_1 + m_2 u_2 , \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 \left(v_1 \cos\alpha\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 u_2^{\,2} ,$$

$$m_1 \left(v_1 \cos\alpha - u_1\right) = m_2 u_2 , \qquad (2)$$

$$m_1 \left(v_1^{\,2} \cos^2\alpha - u_1^{\,2}\right) = m_2 u_2^{\,2} . \qquad (3)$$

(2) és (3) osztásával kapjuk

$$v_1 \cos\alpha + u_1 = u_2 . \qquad (4)$$

Helyettesítsük (1)-be!

$$m_1 v_1 \cos\alpha = m_1 u_1 + m_2 \left(v_1 \cos\alpha + u_1\right),$$

amelyből:
$$u_1 = \frac{v_1 \cos\alpha \left(m_1 - m_2\right)}{m_1 + m_2} = \frac{-v_1 \cos\alpha \cdot m}{3m} = -\frac{v_1 \cos\alpha}{3} .$$

A kapott kifejezés (4)-be való helyettesítésével kapjuk:

$$u_2 = v_1 \cos\alpha - \frac{v_1 \cos\alpha}{3} = \frac{2}{3} v_1 \cos\alpha .$$

Most u_2-t bontsuk fel az m_2 és az m_3 tömegű testet összekötő fonál irányú, és arra merőleges komponensekre! Az 2-es és a 3-as testek tömege egyenlő, ezért a közöttük lezajló „ütközés" során a két test fonálirányban sebességet cserél, így

$$v_3 = u_2 \cos\alpha = \frac{2}{3} v_1 \cos^2\alpha ,$$

iránya azonos v_1-gyel.

A feladat szerint $v_3 = \frac{v_1}{2}$ feltételnek kell teljesülnie, ezért $\frac{2}{3} v_1 \cos^2\alpha = \frac{v_1}{2}$,

amelyből $\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$, amelyből a feladatunk megoldása $\alpha = \mathbf{30}°$.

Megjegyzés: Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy visszafelé haladunk, vagyis kihasználjuk az m_3 tömegű test végső sebességét, amiből meghatározzuk a 2-es test sebességkomponenseit, majd ezekkel írjuk fel az 1-es és 2-es test „ütközésére" az impulzus és energia megmaradási törvényeket.

b) Mivel a külső erők eredője 0, ezért a rendszer összimpulzusa állandó, amely $\vec{p}_ö = m_1 \vec{v}_1$.

Mivel $m_3 = 2m_1$, valamint $\alpha = 30°$ esetén $\vec{v}_3 = \frac{1}{2}\vec{v}_1$, ezért $\vec{p}_3 = \vec{p}_ö$, így $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \underline{0}$.

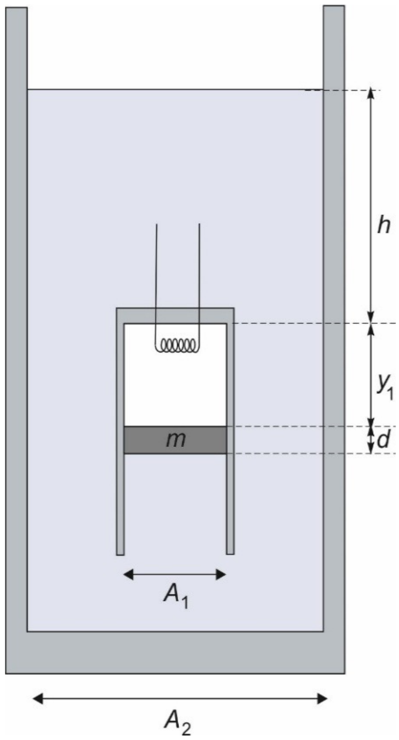
Tehát: $p_3 = mv_1$ nagyságú és $\vec{v}_1$ vektor irányú,

$p_2 = m_2 u_2 \sin\alpha = m_2 \frac{2}{3} v_1 \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot m_2 v_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m v_1$ nagyságú, és v_1 vektorra merőleges irányú, p_1 azonos nagyságú, de ellentétes irányú p_2-vel, így $p_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m v_1$.

Megjegyzés: Eljárhatunk úgy is, hogy külön-külön az ismert sebességekből meghatározzuk az impulzus vektorok nagyságát és irányát, és arról is meggyőződhetünk, hogy a vektori összegük $m_1\vec{v}_1$.

2. feladat. Vízzel töltött, A_2 = 4 dm^2 keresztmetszetű tartály vízszintje alatt h = 1 méter mélységben függőlegesen rögzített hőszigetelő hengerben az ábra szerint m = 16 kg tömegű, könnyen mozgó, szintén jó hőszigetelésű dugattyú zár el kezdetben y_1 = 0,5 m hosszú légoszlopot. A dugattyú vastagsága d = 0,1 m, keresztmetszetének területe A_1 = 2 dm^2. A bezárt levegővel Q = 2000 J hőt közlünk lassan.

a) Ábrázoljuk vázlatosan (numerikus adatok nélkül) a bezárt gáz állapotváltozását a p–V síkon!
b) Mekkora a dugattyú elmozdulása?
c) Mekkora lett a levegő hőmérséklete, ha kezdeti hőmérséklete T_1 = 300 K volt? (A külső légnyomás 10^5 Pa.)



Megoldás. *a)* A dugattyú egyensúlyára a kezdőállapotban felírható:

$$mg = \rho\left(h + y_1 + d\right)A_1 g + p_0 A_1 - p_1 A_1, \qquad (1)$$

ahol p_0 a tengerszint feletti légnyomás, amely menet közben nem változik. Ugyanez a végső esetre

$$mg = \rho\left(h + y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + d\right)A_1 g + p_0 A_1 - p_2 A_1, \qquad (2)$$

ahol figyelembe kell venni, hogy a kezdeti h magasság megváltozik Δy_2-vel, ezzel a külső nyomás is megnő. Ennek nagysága a hengerből kiszoruló víztérfogat és a tartályban megnövekedő térfogat egyenlőségéből számítható, és y_1-gyel kifejezhető:

$$\Delta y_1 A_1 = \Delta y_2 A_2 \quad \rightarrow \quad \Delta y_2 = \frac{A_1}{A_2}\Delta y_1.$$

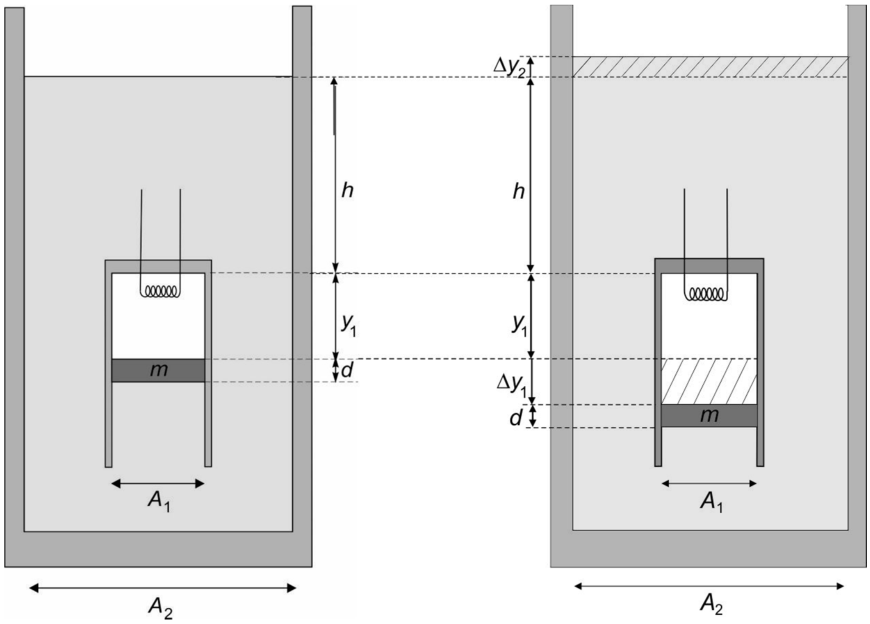
Az (1) és a (2) jobb oldalai egyenlőek:

$$\rho\left(h+y_1+d\right)A_1g+p_0A_1-p_1A_1=\rho\left(h+y_1+\Delta y_1+\Delta y_2+d\right)A_1g+p_0A_1-p_2A_1,$$

egyszerűsítés után:

$$p_2-p_1=\rho\left(\Delta y_1+\Delta y_2\right)g \quad\rightarrow\quad p_2=p_1+\rho\left(\Delta y_1+\Delta y_2\right)g. \qquad (3)$$

A nyomás lineárisan változik Δy_1-gyel, azaz a gáz térfogatváltozásával. Így az állapotváltozást a $p-V$ síkon egy **pozitív meredekségű egyenes** adja meg.



b) A gáz által végzett munkára a lineáris nyomásnövekedés miatt:

$$W_{\text{gáz}}=\Delta y_1\frac{p_1+p_2}{2}A_1.$$

Beírva p_2 értékét:

$$W_{\text{gáz}}=\Delta y_1\frac{p_1+p_1+\rho\left(\Delta y_1+\Delta y_2\right)g}{2}A_1=\Delta y_1\frac{2p_1+\rho\left(\Delta y_1+\Delta y_2\right)g}{2}A_1.$$

Az I. főtétel szerint:

$$\Delta E=Q-W_{\text{gáz}},$$

ahol

$$\Delta E=\frac{f}{2}\left(p_2V_2-p_1V_1\right).$$

Ezzel a főtétel így írható:

$$\frac{f}{2}\left(p_2V_2-p_1V_1\right)=Q-\frac{2p_1\Delta y_1+\rho\left(\Delta y_1\right)^2g+\rho\Delta y_1\cdot\Delta y_2g}{2}A_1.$$

Írjuk be p_2-t p_1-gyel (3)-ból, továbbá V_2-t és V_1-et az elmozdulásokkal és keresztmetszettel:

$$\frac{f}{2}[(p_1+\rho(\Delta y_1+\Delta y_2)g)(y_1+\Delta y_1)A_1-p_1y_1A_1]=$$
$$=Q-\frac{2p_1\Delta y_1+\rho(\Delta y_1)^2g+\rho\Delta y_1\cdot\Delta y_2g}{2}A_1.$$

p_1 a kezdeti adatokból numerikusan meghatározható, így már csak a keresett egyetlen ismeretlen (Δy_1) maradt.

A bezárt levegő kezdeti nyomása legelső egyenletünkből:

$$p_1 = \rho\left(h + y_1 + d\right) g + p_0 - \frac{mg}{A}$$

Ebben minden adat ismert, innen már csak numerikusan érdemes tovább számolni! A kezdeti nyomás nagysága:

$$p_1 = 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(1\text{ m} + 0{,}5\text{ m} + 0{,}1\text{ m}\right)10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 10^5\,\text{Pa} - \frac{160\text{ N}}{2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2} = 1{,}08\cdot 10^5\,\text{Pa}.$$

Az öt szabadsági fokú levegőre egyenletünk így írható:

$$\frac{5}{2}\left[\left(1{,}08\cdot 10^5\,\text{Pa} + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(\Delta y_1 + \Delta y_2\right)\right)\left(0{,}5\text{ m} + \Delta y_1\right)2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2 - 1{,}08\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot 0{,}5\text{ m}\cdot 2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2\right] =$$

$$= 2000\text{ J} - \frac{2\cdot 1{,}08\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot\Delta y + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(\Delta y_1\right)^2 + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\Delta y_1\Delta y_2}{2}2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2$$

$$\Delta y_2 = \frac{A_1}{A_2}\Delta y_1 = \frac{1}{2}\Delta y_1 \quad \text{beírásával} \quad \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{A_1 + A_2}{A_2}\Delta y_1 = \frac{6}{4}\Delta y_1 = 1{,}5\Delta y_1:$$

$$\frac{5}{2}\left[\left(1{,}08\cdot 10^5\,\text{Pa} + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}1{,}5\Delta y_1\right)\left(0{,}5\text{ m} + \Delta y_1\right)2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2 - 1{,}08\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot 0{,}5\text{ m}\cdot 2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2\right] =$$

$$= 2000\text{ J} - \frac{2\cdot 1{,}08\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot\Delta y_1 + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(\Delta y_1\right)^2 + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}0{,}5\left(\Delta y_1\right)^2}{2}2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2$$

A numerikus számítások elvégzése után (még rendezés előtt):

$$\left(270000\text{ Pa} + 37500\frac{\text{N}}{\text{m}^3}\Delta y_1\right)\left(0{,}01\text{ m}^3 + 2\cdot 10^{-2}\,\text{m}^2\Delta y_1\right) - 2700\text{ J} = 2000\text{ J} - 2160\text{ Pa}\cdot\Delta y_1 - 150\left(\Delta y_1\right)^2$$

A kijelölt műveleteket elvégezve:

$$2700\text{ J} + 375\text{ N}\cdot\Delta y_1 + 5400\text{ N}\cdot\Delta y_1 + 750\frac{\text{N}}{\text{m}}\left(\Delta y_1\right)^2 - 2700\text{ J} = 2000\text{ J} - 2160\text{ N}\cdot\Delta y_1 - 150\frac{\text{N}}{\text{m}}\left(\Delta y_1\right)^2$$

Rendezve az egyenletet vegyes másodfokú egyenlethez jutunk:

$$900\left(\Delta y_1\right)^2 + 7935\Delta y_1 - 2000 = 0.$$

Osztva 5-szal:

$$180\left(\Delta y_1\right)^2 + 1587\Delta y_1 - 400 = 0.$$

Megoldása:

$$\Delta y_1 = \frac{-1587 + \sqrt{1587^2 + 4\cdot 180\cdot 400}}{2\cdot 180}\text{ m} = \mathbf{0{,}2452\text{ m} \approx 25\text{ cm}.}$$

b) A gáztörvény alapján:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad T_2=T_1\frac{p_2V_2}{p_1V_1}=T_1\frac{\left[p_1+\rho\left(\Delta y_1+\Delta y_2\right)g\right]\left(V_1+\Delta y_1A_1\right)}{p_1y_1A_1}=$$

$$=300\ \text{K}\frac{\left[1,08\cdot10^5+10^3.\left(0,2452+0,1226\right)\cdot10\right]\left(0,01+0,2452\cdot2\cdot10^{-2}\right)}{1,08\cdot10^5\cdot0,5\cdot2\cdot10^{-2}}\approx\mathbf{462\ K=189°C.}$$

3. feladat. Egy C_1 = 2 nF, egy C_2 = 3 nF és egy C_3 = 6 nF kapacitású kondenzátort külön-külön 100 V feszültségre töltünk, majd sorba kapcsoljuk őket a szokásos módon: az 1. kondenzátor negatív töltésű fegyverzetét összekötjük a 2. kondenzátor pozitív töltésű fegyverzetével, és a 2. kondenzátor negatív töltésű fegyverzetét összekötjük a 3. kondenzátor pozitív töltésű fegyverzetével. Ezután az 1. kondenzátor pozitív töltésű fegyverzetét és a 3. kondenzátor negatív töltésű fegyverzetét egy vezetékkel szintén összekötjük („rövidre zárjuk”).

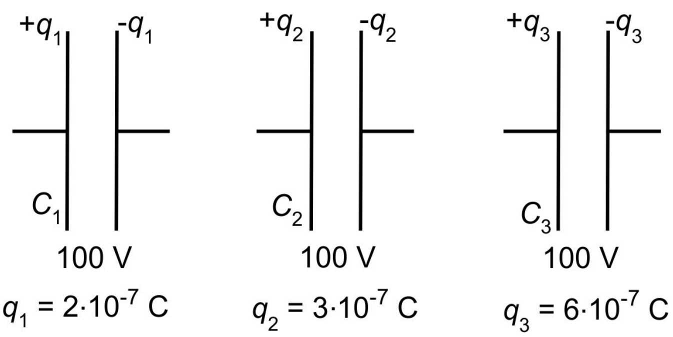
Számítsuk ki a kondenzátorokra jutó feszültségeket és a kondenzátorok töltéseit az egyensúly beállta után!

Megoldás. Először számítsuk ki az egyes kondenzátorok elektromos töltéseit $Q = C\cdot U$ alapján!

$$q_1 = C_1\cdot U = 2\cdot10^{-9}\ \text{F}\cdot 100\ \text{V} = 2\cdot10^{-7}\ \text{C},$$

$$q_2 = C_2\cdot U = 3\cdot10^{-9}\ \text{F}\cdot 100\ \text{V} = 3\cdot10^{-7}\ \text{C},$$

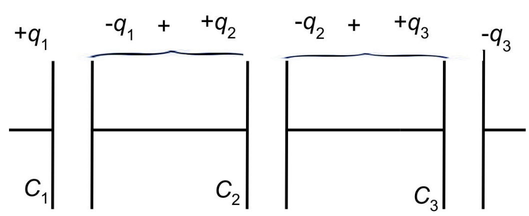
$$q_3 = C_3\cdot U = 6\cdot10^{-9}\ \text{F}\cdot 100\ \text{V} = 6\cdot10^{-7}\ \text{C}.$$



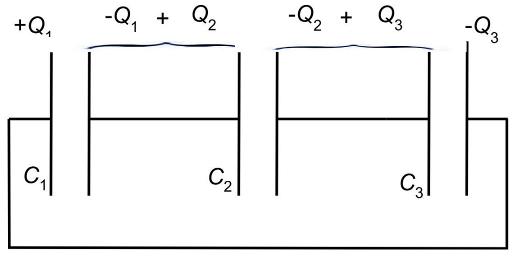
Szükségünk lesz még a későbbiekben a három sorba kapcsolt kondenzátor eredő kapacitására:

$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\text{nF}=\frac{1}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}\text{nF}=\frac{1}{\frac{6}{6}}\text{nF}=1\ \text{nF}.$$

A három töltött kondenzátor sorba kapcsolása azt jelenti, hogy ekvipotenciálisokká tettük az 1. kondenzátor negatív töltésű, és a 2. kondenzátor pozitív töltésű fegyverzetét; és hasonlóképpen a 2. kondenzátor negatív töltésű fegyverzetét a harmadik kondenzátor pozitív töltésű fegyverzetével. Ezért a kondenzátor-telepen 300 V feszültség jelenik meg.



Jelentse Q_1, Q_2 és Q_3 a rövidre zárás utáni egyensúlyi állapotban az egyes kondenzátorok töltéseit!



Az elektromos töltés megmaradásának értelmében a következők igazak:

$$-q_1 + q_2 = -Q_1 + Q_2,$$

$$-q_2 + q_3 = -Q_2 + Q_3,$$

$$q_1 - q_3 = Q_1 - Q_3.$$

Mivel mindhárom egyenletben mindig csak valamelyik két index szerepel a három közül, ez csak úgy teljesülhet mindhárom egyenlet esetében egyszerre, ha bármelyik kondenzátor töltése ugyanazzal a ΔQ töltésmennyiséggel változik a rövidre zárást követően:

$$Q_1 = q_1 - \Delta Q, \qquad Q_2 = q_2 - \Delta Q \quad \text{és} \quad Q_3 = q_3 - \Delta Q.$$

Ugyanakkor a huroktörvény értelmében tudjuk, hogy a három kondenzátoron mérhető feszültségek algebrai összege zérus kell hogy legyen.

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = 0,$$

azaz

$$\frac{q_1 - \Delta Q}{C_1} + \frac{q_2 - \Delta Q}{C_2} + \frac{q_3 - \Delta Q}{C_3} = 0.$$

Átrendezés után:

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} - \frac{\Delta Q}{C_1} - \frac{\Delta Q}{C_2} - \frac{\Delta Q}{C_3} = 0$$

Az első három tag külön-külön 100 voltot jelent, így

$$\Delta Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = 300\ \text{V}.$$

A zárójelben lévő kifejezés a három sorba kapcsolt kondenzátor eredőjének reciproka.

Ez adataink szerint $10^9\ \dfrac{1}{\text{F}}$. Ezért

$$\Delta Q = \frac{300}{10^9}\ \text{C} = 3\cdot 10^{-7}\ \text{C}.$$

Így a kondenzátorok új töltése rendre:

$$Q_1 = q_1 - \Delta Q = 2\cdot 10^{-7}\ \text{C} - 3\cdot 10^{-7}\ \text{C} = \mathbf{-10^{-7}\ C},$$

$$Q_2 = q_2 - \Delta Q = 3\cdot 10^{-7}\ \text{C} - 3\cdot 10^{-7}\ \text{C} = \mathbf{0},$$

$$Q_3 = q_3 - \Delta Q = 6\cdot 10^{-7}\ \text{C} - 3\cdot 10^{-7}\ \text{C} = \mathbf{3\cdot 10^{-7}\ C}.$$

A rajtuk megjelenő feszültségek rendre:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{-10^{-7}\,\mathrm{C}}{2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}} = \mathbf{-50\ V},$$

ami annyit jelent, hogy az 1. kondenzátor fegyverzeteinek polaritása megfordul az eredeti állapothoz képest.

$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{0\ \mathrm{C}}{3\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}} = \mathbf{0\ V},$$

azaz ennek a kondenzátornak a fegyverzetei ekvipotenciálisak.

Végül:

$$U_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{3\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}}{6\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}} = \mathbf{50\ V}.$$

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	Fonalak által közvetített, egymás után lejátszódó „ütközések” felismerése	4 pont
	Az m_1, m_2 tömegű testek közötti „ütközésben” a sebességek meghatározása	6 pont
	Az m_2, m_3 tömegű testek közötti „ütközésben” a sebességek meghatározása	3 pont
	Az α szög meghatározása	1 pont
b)	Az egyes testek impulzusvektorainak megadása indoklással	6 pont
		Összesen: **20 pont**

2. feladat

a)	A folyamat ábrázolása az állapotsíkon	2 pont
b)	A dugattyú egyensúlyára helyesen felírt két egyenlet	3 pont
	A helyesen kiszámított nyomás a második állapotban	2 pont
	A gáz munkájának helyes kifejezése	2 pont
	Az I. főtétel helyes alkalmazása	2 pont
	p_1 értékének helyes meghatározása	2 pont
	A dugattyú elmozdulásának meghatározása	5 pont
c)	A gáz végső hőmérsékletének helyes kiszámítása	2 pont
		Összesen **20 pont**

3. feladat

	Az egyes kondenzátorok eredeti töltéseinek meghatározása	1 pont
	A töltésmegmaradás felírása a három csomópontra	7 pont
	A huroktörvény felírása	7 pont
	A számítások elvégzése	5 pont
		Összesen: **20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.