Oktatási Hivatal

A 2019/2020. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

FIZIKA

I. kategória

Javítási-értékelési útmutató

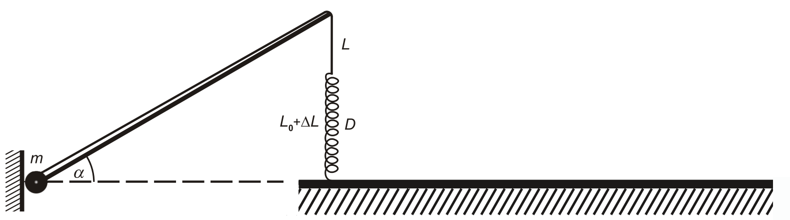
A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

1. feladat

Az ábrán látható merev pálca úgy van függőleges síkban rögzítve, hogy az a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget zár be. A pálcára egy kicsiny, $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ tömegű, gömb alakú gyöngy van fűzve, mely a pálcán súrlódásmentesen csúszhat. A gyöngyhöz egy (abszolút hajlékony) fonál van erősítve, mely a pálca jobb oldali szélén lévő kicsiny bemélyedésen van átvetve, és ez a vége egy (elhanyagolható tömegű) függőleges helyzetű, $D = 240\,\mathrm{N/m}$ direkciós erejű rugóhoz csatlakozik. A fonál ezen része függőleges. A rugó alja a pálca aljával egy szintben lévő, elegendően széles asztalhoz van erősítve. A rugó erőmentes állapotban $L_0 = 20\,\mathrm{cm}$ hosszúságú. Kezdetben a rugó megnyúlása $\Delta L = 10\,\mathrm{cm}$, és felső vége a bemélyedéstől $L = 10\,\mathrm{cm}$ távolságra van. Ekkor a pálca aljánál lévő gyöngyöt nulla sebességgel elengedjük.

a) Milyen magasra emelkedik a gyöngy, mielőtt becsapódik az asztal lapjába?

b) A kiindulási pontjától mérve hol csapódik be a gyöngy az asztal lapjába?



Megoldás

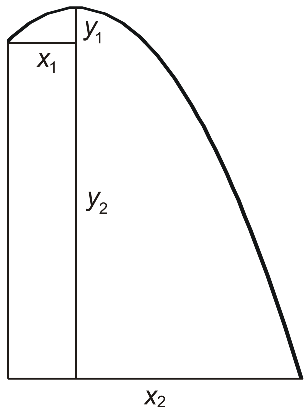
Az elengedést követően a gyöngy elindul a pálcán felfelé, mivel a nehézségi erő $mg\sin\alpha = 1\,\mathrm{N}$ nagyságú, pálca irányú komponense kisebb, mint a fonálban ébredő erő, ami a $D\Delta L = 24\,\mathrm{N}$ nagyságú rugóerővel egyezik meg. Amikor a gyöngy eléri a pálca felső végét, a sebességét az energiamegmaradásból adhatjuk meg:

$$mg\left(L_0 + \Delta L + L\right) + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}D(\Delta L)^2,$$

amiből

$$v=\sqrt{\frac{D(\Delta L)^2}{m}-2g\left(L_0+\Delta L+L\right)}=2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A gyöngy tehát eléri a pálca felső végét, majd 2 m/s kezdősebességű, 30°-os ferde hajításba kezd. Tegyük fel, hogy a gyöngy további mozgása során, amíg az asztalba ütközik, a fonál nem feszül meg. Keressük meg a pálya tetőpontját és az asztalba csapódás helyét. Ehhez tekintsük az alábbi ábrát.



A pálcát elhagyva, amíg a gyöngy eléri pályája tetőpontját

$$t_1=\frac{v\sin\alpha}{g}=0{,}1\,\mathrm{s}$$

idő telik el, így az emelkedés magassága a pálca felső végétől mérve

$$y_1=\frac{1}{2}vt_1\sin\alpha=0{,}05\,\mathrm{m},$$

és ezalatt a gyöngy vízszintes irányú elmozdulása

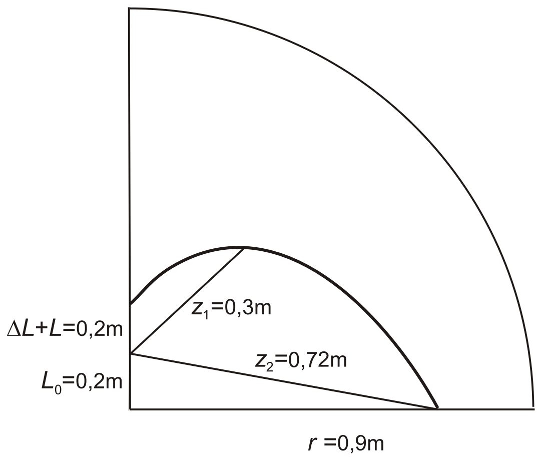
$$x_1=vt_1\cos\alpha=0{,}17\,\mathrm{m}.$$

A tetőponttól számítva az asztalba csapódásig eltelt idő:

$$t_2=\sqrt{\frac{2(L_0+\Delta L+L+y_1)}{g}}=0{,}3\,\mathrm{s},$$

tehát a összes eltelt idő $t=t_1+t_2=0{,}4$ s. Ezalatt a gyöngy vízszintes irányú elmozdulása

$$x_2=vt\cos\alpha=0{,}693\,\mathrm{m}\approx 0{,}7\,\mathrm{m},$$



Geometriai megfontolásokból megmutatható, hogy az asztalba csapódásig a fonál laza marad. Például a fenti ábrán nézzük a tetőpont távolságát a nyújtatlan rugó felső pontjától, azaz a fonál alsó végétől

$$z_1 = \sqrt{(L + \Delta L + y_1)^2 + x_1^2} = 0{,}30\,\mathrm{m},$$

a becsapódási pont a fonál alsó végétől

$$z_2 = \sqrt{L_0^2 + x_2^2} = 0{,}72\,\mathrm{m}$$

távolságra van. A fonál hossza

$$r = L + \frac{L_0 + \Delta L + L}{\sin\alpha} = 0{,}90\,\mathrm{m}.$$

Ehhez még hozzáadódik a nyújtatlan rugó hossza, ugyanis attól kezdve, hogy a fonál meglazul, a súlytalan, nyújtatlan rugó is fonálként viselkedik: $r + L_0 = 1{,}1$ m. Az ábrán látszik, hogy a gyöngy pályáját jelző parabola az $r + L_0$ sugarú körön (melynek középpontja a rugó alsó rögzítési pontjában van) belül van, ezért a fonál valóban laza marad.

a) Tehát a becsapódásig a gyöngy

$$h = L_0 + L + \Delta L + y_1 = 0{,}45\ \mathrm{m}$$

magasra emelkedik fel.

b) Az asztalba csapódás helye a kiindulási ponttól:

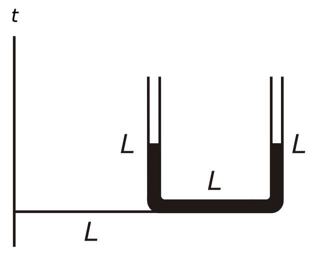
$$d = x_2 + \frac{L_0 + \Delta L + L}{\operatorname{tg}\alpha} = 1{,}4\,\mathrm{m}.$$

2. feladat

Az ábrán lévő U-alakú, könnyű üvegcső L hosszú, függőleges szárai félig vannak vízzel megtöltve. Az üvegcsövet a t-tengely körül elkezdjük forgatni lassan növekvő szögsebességgel.

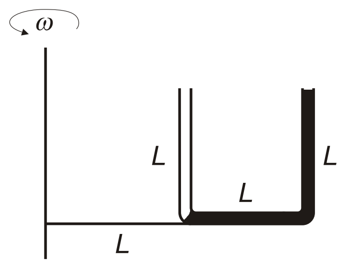
a) Legfeljebb mekkora lehet az eszköz ω szögsebessége, ha víz nem folyhat ki belőle?

b) Legalább mekkora munkavégzést igényel az ω szögsebesség elérése? A cső keresztmetszete A.



Megoldás

a) Határesetben az U-alakú cső függőleges száraiban lévő vízoszlopok magasságkülönbsége L.



Ebből következik, hogy a vízszintes üvegrészben lévő vízre ható, a forgástengely felé mutató, vízszintes irányú eredő erő:

$$\sum F = \varrho L g A.$$

Ez az eredő erő okozza a vízszintes csőrészben lévő, L hosszúságú vízmennyiség centripetális gyorsulását:

$$\varrho L g A = A L \varrho \omega^2 \cdot \frac{3}{2} L.$$

Innen már könnyen kifejezhetjük a keresett az ω szögsebességet:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3L}}.$$

Megjegyzés: Fenti eredményt kapjuk akkor is, ha a vízszintes vízoszlopot igen sok kicsiny részre osztjuk, és ezeket a részeket vizsgáljuk dinamikailag. A t-tengelytől r távolságra lévő Δr vastag vízréteg időegységre eső lendületváltozása

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \Delta m \cdot a(r) = A \Delta r \varrho \omega^2 \cdot r.$$

Ezeket az elemi, időegységre eső lendületváltozásokat adjuk össze a vízszintes üvegrészben lévő vízmennyiség mentén, és tegyük egyenlővé a vízoszlopra ható vízszintes irányú eredő erővel:

$$\varrho L g A = \sum_{r=L}^{2L} A \Delta r \varrho \omega^2 \cdot r = A \varrho \omega^2 \sum_{r=L}^{2L} r \Delta r = A \varrho \omega^2 \cdot \frac{3L^2}{2},$$

ami megegyezik a fenti eredményünkkel. Az összegzés visszavezethető egy trapéz területének meghatározására.

b) Legalább annyi munkát kell végeznünk, amennyivel megváltozott a víz mechanikai (helyzeti és forgási) energiája. A víz helyzeti energiájának megváltozása (a forgástengelyhez közelebbi szárban lévő $L/2$ magas vízoszlop a távolabbi szárban lévő $L/2$ magas vízoszlop fölé került):

$$\Delta E_{\mathrm{h}} = A \frac{L}{2} \varrho \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{4} A \varrho g L^2.$$

A víz forgási energiájának megváltozása:

$$\Delta E_\mathrm{f} = \frac{1}{2}\left[AL\varrho(2L)^2 + \left(\frac{1}{3}A2L\varrho(2L)^2 - \frac{1}{3}AL\varrho L^2\right)\right]\omega^2 = \frac{19}{6}A\varrho L^3\omega^2,$$

ahol a szögletes zárójelben lévő kifejezés első tagja a függőleges szárban lévő folyadék, a második tag pedig a vízszintes részben lévő folyadék tehetetlenségi nyomatéka. Ez utóbbi úgy lett meghatározva, hogy a forgástengelytől számított $2L$ hosszú, vízszintes „vízrúd” tehetetlenségi nyomatékából kivonjuk a tengelytől L távolságig hiányzó víz tehetetlenségi nyomatékát. (Természetesen a Steiner-tétel is ugyanerre az eredményre vezet.) Helyettesítsük be az *a)* feladatrészben az ω szögsebességre kapott kifejezést:

$$\Delta E_\mathrm{f} = \frac{19}{6}A\varrho L^3\frac{2g}{3L} = \frac{19}{9}A\varrho g L^2.$$

Az ω szögsebesség elérése legalább W munkavégzést igényel:

$$W = \Delta E_\mathrm{h} + \Delta E_\mathrm{f} = \frac{1}{4}A\varrho g L^2 + \frac{19}{9}A\varrho g L^2 = \frac{85}{36}A\varrho g L^2.$$

3. feladat

Könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben $m = 180\,\mathrm{g}$ tömegű, héliumból és hidrogénből álló gázkeverékkel állandó nyomáson $Q = 156\,\mathrm{kJ}$ hőt közlünk. Ennek hatására a gázkeverék $W_\text{gáz} = 56\,\mathrm{kJ}$ munkát végzett.

a) Hány gramm hidrogén van a hengerben?

b) Mekkora a gázkeverék hőmérséklet-változása?

Megoldás

a) A hőtan I. főtétele szerint a gáz belső energiájának megváltozása:

$$\Delta E = Q + W = Q - W_\text{gáz} = 100\,\mathrm{kJ}.$$

Dalton törvénye alapján a keverék alkotta teljes nyomás (az 1-es index a hidrogént, a 2-es a héliumot jelöli):

$$p = p_1 + p_2 = \frac{n_1 RT}{V} + \frac{n_2 RT}{V} = (n_1 + n_2)\,\frac{RT}{V} \quad \rightarrow \quad pV = (n_1 + n_2)RT.$$

A gáz által végzett munka (kihasználva, hogy a folyamat izobár) és a belső energia változása a mólszámokkal kifejezhető:

$$W_\text{gáz} = p\Delta V = (n_1 + n_2)\cdot R\Delta T,$$

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = \left(\frac{f_1}{2}n_1 + \frac{f_2}{2}n_2\right)\cdot R\Delta T.$$

A munka kifejezéséből $R\Delta T$ értékét az energiaváltozás kifejezésébe írva:

$$\Delta E = \left(\frac{f_1}{2}n_1 + \frac{f_2}{2}n_2\right)\frac{W_\text{gáz}}{n_1 + n_2}.$$

A mólszám arányára kaphatunk összefüggést, ha a belsőenergia-változást elosztjuk a gáz munkájával:

$$\frac{2 \cdot \Delta E}{W_{\text{gáz}}} = \frac{f_1 n_1 + f_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{5n_1 + 3n_2}{n_1 + n_2}.$$

Ebbe az adatokat beírva:

$$\frac{5n_1 + 3n_2}{n_1 + n_2} = \frac{2 \cdot \Delta E}{W_{\text{gáz}}} = \frac{200}{56}.$$

Vezessük be az $n_1/n_2 = x$ jelölést! Akkor egyenletünk (a bal oldali tört számlálóját és nevezőjét elosztva n_2-vel) így alakul:

$$\frac{5x + 3}{x + 1} = \frac{25}{7} \quad \to \quad x = 0{,}4.$$

A mólszámok arányából megkaphatjuk a tömegarányt ($M_1 = 2\,\text{g/mol}$, $M_2 = 4\,\text{g/mol}$):

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{M_2}{m_2} = 0{,}4 \quad \to \quad \frac{m_1}{m_2} = 0{,}4\frac{M_1}{M_2} = 0{,}2 \quad \to \quad m_2 = 5m_1.$$

A két tömeg összege viszont $m = 180\,\text{g}$, tehát

$$m_1 + 5m_1 = m \quad \to \quad 6m_1 = 180\,\text{g} \quad \to \quad m_1 = 30\,\text{g}.$$

Vagyis a gázkeverékben 30 g hidrogén és 150 g hélium van.

b) A hőmérséklet-változás a

$$p\Delta V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) \cdot R\Delta T = W_{\text{gáz}}$$

egyenletből kapható meg:

$$\Delta T = \frac{W_{\text{gáz}} M_1 M_2}{(m_1 M_2 + m_2 M_1) \cdot R} = 128\,\text{K}.$$

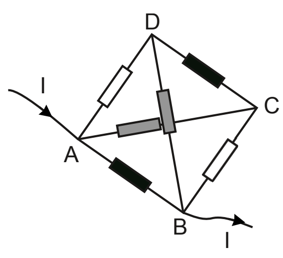
4. feladat

Az ábrán látható tetraéder éleit egy-egy ellenállás alkotja. A hat ellenállás közül kettő-kettő 1 Ω-os, 2 Ω-os és 3 Ω-os. Bármely csúcsból induló három ellenállás különböző. Az A és B csúcsot 1 Ω-os ellenállás köti össze. Az A csúcsnál a tetraéderbe befolyik $I = 1\,\text{A}$ elektromos áram, a B csúcsnál kifolyik.

a) Mekkora elektromos áram folyik az egyes ellenállásokon?

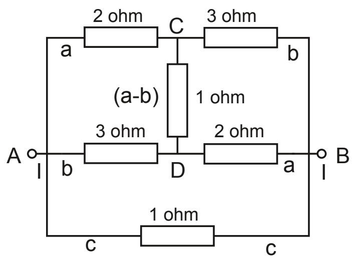
b) Mekkora az egyes ellenállások elektromos teljesítménye?

c) Mekkora egyetlen ellenállással lehetne helyettesíteni az ellenállásrendszert?



Megoldás

a) Rajzoljuk át a térbeli ellenállásrendszert síkbelire!



Jelölje a, b és c a rajzon látható három mellékágban folyó áramot. Kirchhoff I. törvénye szerint az A csúcsnál a rendszerbe befolyó I áramerősség megegyezik a mellékágak áramerősségeinek összegével: $I = a + b + c$, valamint a hidat alkotó 1 ohmos ellenálláson $(a-b)$ áramerősség jelenik meg. Írjuk fel Kirchhoff II. törvényét a bal felső hurokra:

$$-a \cdot 2\,\Omega - (a-b) \cdot 1\,\Omega + b \cdot 3\,\Omega = 0 \quad \rightarrow \quad 3a = 4b.$$

Írjuk fel Kirchhoff II. törvényét az alsó hurokra is:

$$-b \cdot 3\,\Omega - a \cdot 2\,\Omega + c \cdot 1\,\Omega = 0.$$

Az eddig felírt egyenletekből választ adhatunk a kérdésekre:

$$a = \frac{4}{24} I = \frac{1}{6}\,\mathrm{A}, \quad b = \frac{3}{24} I = \frac{1}{8}\,\mathrm{A}, \quad c = \frac{17}{24} I = \frac{17}{24}\,\mathrm{A}.$$

b) Az A és B pontokat összekötő 1 ohmos ellenállás elektromos teljesítménye:

$$P_1 = \left(\frac{17}{24}\,\mathrm{A}\right)^2 \cdot 1\,\Omega = \frac{289}{576}\,\mathrm{W}.$$

A hídként szerepelő 1 ohmos ellenállás elektromos teljesítménye:

$$P_1^* = \left(\frac{1}{24}\,\mathrm{A}\right)^2 \cdot 1\,\Omega = \frac{1}{576}\,\mathrm{W}.$$

A 2 ohmos ellenállás elektromos teljesítménye:

$$P_2 = \left(\frac{1}{6}\,\mathrm{A}\right)^2 \cdot 2\,\Omega = \frac{1}{18}\,\mathrm{W}.$$

A 3 ohmos ellenállás elektromos teljesítménye:

$$P_3 = \left(\frac{1}{8}\,\mathrm{A}\right)^2 \cdot 3\,\Omega = \frac{3}{64}\,\mathrm{W}.$$

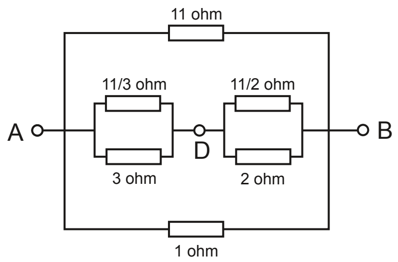
c) A hat ellenálláson keletkező teljesítmények összege kifejezhető az eredő ellenállással is:

$$P_1 + P_1^* + 2P_2 + 2P_3 = I^2 R_\mathrm{e},$$

amiből

$$R_\mathrm{e} = \frac{P_1 + P_1^* + 2P_2 + 2P_3}{I^2} = \left(\frac{289}{576} + \frac{1}{576} + 2\cdot\frac{1}{18} + 2\cdot\frac{3}{64}\right)\Omega = \frac{17}{24}\Omega.$$

Megjegyzés: Az eredő ellenállás értékét kiszámolhatjuk úgy is, ha például az A, B és C melletti csomópontok közötti három ellenállás alkotta csillagkapcsolást helyettesítjük delta-kapcsolással. Így a C csomópont „eltűnik”. Ekkor a következő egyszerűbb áramkör adódik:



Ennek az eredő ellenállása a korábban kapottal egyezik meg.

Az eredő ellenállást úgy is megkaphatjuk, ha észrevesszük, hogy a helyettesítő ellenállásra igaz, hogy:

$$IR_\mathrm{e} = c\cdot 1\,\Omega = \frac{17}{24}I\cdot 1\,\Omega,$$

hiszen a helyettesítő ellenálláson eső feszültség az A és B pontok közé kapcsolt 1 ohmos ellenálláson eső feszültséggel azonos. Így az ellenállásrendszert helyettesítő egyetlen ellenállás (eredő ellenállás) értéke:

$$R_\mathrm{e} = \frac{17}{24}\,\Omega,$$

egyezésben a *c)* részben kapottal.

Értékelési útmutató

1. feladat

	A gyöngy sebessége a pálca tetejénél:	6 pont
	A hajítás emelkedési magassága:	3 pont
	A hajítás távolsága:	3 pont
	Fonál lazaságának ellenőrzése:	3 pont
	A válasz megadása az *a)* kérdésre:	2 pont
	A válasz megadása a *b)* kérdésre:	3 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	Annak felismerése, hogyan helyezkedik el a folyadék a csőben a legnagyobb szögsebesség esetén:	2 pont
	Dinamikai vizsgálat:	3 pont
	A szögsebesség helyes megadása:	5 pont
b)	Annak felismerése, hogy az általunk végzett munka a folyadék mechanikai energia változását eredményezi:	2 pont
	A helyzetienergia-változás megadása :	2 pont
	A forgási energia helyes megadása:	5 pont
	A végzett munka megadása:	1 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	A Dalton-törvény felhasználásával az eredő nyomás meghatározása:	5 pont
	A gázkeverék energiaváltozásának felírása a mólszámokkal és munkavégzéssel:	5 pont
	A részecskeszám-arány meghatározása:	4 pont
	A hengerben lévő hidrogén tömegének meghatározása:	3 pont
b)	A gáz hőmérséklet-változásának meghatározása:	3 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

a)	A mellékágakban folyó áramerősségek közötti helyes kapcsolatok megfogalmazása:	4 pont
	Két áramhurokban megjelenő feszültségek közötti kapcsolat felírása:	3 pont
	Az A csúcsból induló három áramerősség helyes megadása:	3 pont
b)	Ellenállások elektromos teljesítményének megadása:	6 pont
c)	Az eredő ellenállás megadása:	4 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.