language: Hungarian

3^{rd} Middle European Mathematical Olympiad

Egyéni verseny

2009. szeptember 26.

I-1. feladat

Adjuk meg az összes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát jelöli.

I-2. feladat

Tegyük fel, hogy van $n \geqslant 3$ különböző színünk. Legyen $f(n)$ a legnagyobb egész, melyre egy $f(n)$ csúcsú konvex sokszög oldalai és átlói megszínezhetőek ezzel az n színnel a következő módon:

- legalább két színt használunk, és
- akárhogy is választjuk ki három csúcsát a sokszögnek, az általuk meghatározott három szakasz vagy mind egyszínű, vagy mind különböző színűek.

Mutassuk meg, hogy $f(n) \leqslant (n-1)^2$, valamint azt, hogy végtelen sok n esetén egyenlőség áll.

I-3. feladat

Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, melyre AB és CD nem párhuzamosak valamint $AB = CD$. Az AC és BD átlók felezőpontjait E és F jelöli. Az EF egyenes az AB és CD szakaszokat rendre a G és H pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy $AGH\sphericalangle = DHG\sphericalangle$.

I-4. feladat

Határozzuk meg az összes olyan $k \geqslant 2$ egész számot, melyre fennáll, hogy k nem osztja az $n^{n-1} - m^{m-1}$ kifejezést egyetlen olyan (m, n) párra sem, mely k-nál nem nagyobb különböző pozitív egészekből áll.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket az első 30 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.