Egyéni verseny

2012. szeptember 8.

6TH MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
SOLOTHURN 2012
SWITZERLAND

I-1. feladat

Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényt, melyre:

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

teljesül tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén. ($\mathbb{R}^+$ jelöli a pozitív valós számok halmazát.)

I-2. feladat

Legyen N egy pozitív egész szám. Az $S \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ halmazt *megengedett*nek nevezzük, ha nem választhatók ki a, b, c különböző elemek S-b?l úgy, hogy a osztója b-nek és b osztója c-nek. Legfeljebb hány eleme lehet egy megengedett S halmaznak?

I-3. feladat

Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$ és $AB > CD$, valamint a BD egyenes felezi az ADC szöget. A C-n átmenő, AD-vel párhuzamos egyenes a BD szakaszt az E, az AB szakaszt az F pontban metszi. Jelölje O a BEF háromszög köréírt körének középpontját. Tegyük fel, hogy $ACO\sphericalangle = 60°$. Bizonyítsuk be, hogy:

$$CF = AF + FO$$

I-4. feladat

Az $\{a_n\}_{n\geq 0}$ sorozatra $a_0 = 2, a_1 = 4$, valamint

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1} \text{ teljesül minden pozitív egész } n\text{-re.}$$

Határozzuk meg az összes p prímszámot, melyre létezik m pozitív egész úgy, hogy $a_m - 1$ osztható p-vel.

Language: Hungarian

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.

Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.

Minden feladat 8 pontot ér.

A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.