# Csapatverseny

2012. szeptember 9.

6TH MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
SOLOTHURN 2012
SWITZERLAND

**T-1. feladat**

Határozzuk meg az összes $(x, y, z)$ valós számhármast, amelyre teljesül:

$$2x^3 + 1 = 3zx,$$
$$2y^3 + 1 = 3xy,$$
$$2z^3 + 1 = 3yz.$$

**T-2. feladat**

Legyenek $a, b$ és $c$ olyan pozitív valós számok, melyekre $abc = 1$. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geq 3 + 4(a + b + c).$$

**T-3. feladat**

Legyen $n$ egy pozitív egész szám. Tekintsük az $M, E, O$ betűkből álló, $n$ hosszúságú szavakat. Nevezzünk blokknak két egymást követő betű alkotta részszót. Azon szavak számát, melyekben az $ME$ blokkok száma is páros (akár 0 is lehet) és az $MO$ blokkok száma is páros (akár 0 is lehet), jelöljük $a$-val. Hasonlóan, azon szavak számát, melyekben az $ME$ blokkok száma is páratlan, és az $MO$ blokkok száma is páratlan, jelöljük $b$-vel. Bizonyítsuk be, hogy $a > b$.

**T-4. feladat**

Legyen $p$ egy kettőnél nagyobb prímszám. Az $S = \{1, 2, \ldots, p\}$ halmaz tetszőleges $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p))$ permutációjára $f(\pi)$-vel jelöljük a

$$\pi(1),\ \pi(1) + \pi(2),\ \ldots,\ \pi(1) + \pi(2) + \cdots + \pi(p).$$

számok között a $p$-vel oszthatók számát. Tekintve $S$ összes permutációját, határozzuk meg az $f(\pi)$ értékek átlagát.

**T-5. feladat**

Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának felezőpontját jelölje $K$. Az $AC$ oldalon levő $L$ pontra és a $BC$ oldalon levő $M$ pontra teljesül, hogy: $CLK\sphericalangle = KMC\sphericalangle$. Bizonyítsuk be, hogy az $AB$ oldalra a $K$ pontban, az $AC$ oldalra az $L$ pontban és a $BC$ oldalra az $M$ pontban állított merőlegesek egy ponton mennek át.

**T-6. feladat**

A párhuzamos oldalakkal nem rendelkező $ABCD$ konvex négyszögben $ABC\sphericalangle = CDA\sphericalangle$. A szomszédos csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontjai az $EFGH$ konvex négyszöget alkotják. Legyen $K$ az $EFGH$ négyszög átlóinak metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy az $AB$ és $CD$ egyenesek egymást a $BKD$ háromszög köréírt körén metszik.

**T-7. feladat**

Határozzuk meg az összes, pozitív egészekből álló $(x, y, z)$ számhármast, amely teljesíti a következő egyenletrendszert:

$$x^y + y^x = z^y,$$
$$x^y + 2012 = y^{z+1}.$$

**T-8. feladat**

Léteznek-e olyan $a$ és $b$ pozitív egész számok, melyekre teljesül, hogy $d(a) = d(b)$ és $d(a^2) = d(b^2)$, azonban $d(a^3) \neq d(b^3)$, ahol $d(n)$ jelöli az $n$ pozitív egész szám pozitív osztóinak számát.

*Language: Hungarian*

*A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.*

*Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.*

*Minden feladat 8 pontot ér.*

*A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.*