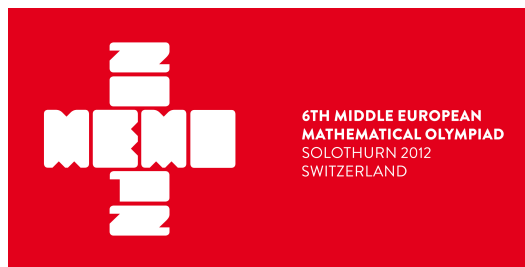


# Csapatverseny

2012. szeptember 9.



## T-1. feladat

Határozzuk meg az összes  $(x, y, z)$  valós számhármast, amelyre teljesül:

$$2x^3 + 1 = 3zx,$$

$$2y^3 + 1 = 3xy,$$

$$2z^3 + 1 = 3yz.$$

## T-2. feladat

Legyenek  $a, b$  és  $c$  olyan pozitív valós számok, melyekre  $abc = 1$ . Bizonyítsuk be, hogy:

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geq 3 + 4(a + b + c).$$

## T-3. feladat

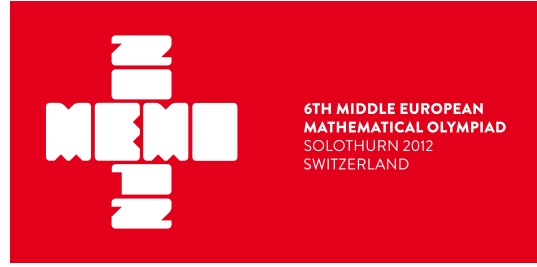
Legyen  $n$  egy pozitív egész szám. Tekintsük az  $M, E, O$  betűkből álló,  $n$  hosszúságú szavakat. Nevezzünk blokknak két egymást követő betű alkotta részsót. Azon szavak számát, melyekben az  $ME$  blokkok száma is páros (akár 0 is lehet) és az  $MO$  blokkok száma is páros (akár 0 is lehet), jelöljük  $a$ -val. Hasonlóan, azon szavak számát, melyekben az  $ME$  blokkok száma is páratlan, és az  $MO$  blokkok száma is páratlan, jelöljük  $b$ -vel. Bizonyítsuk be, hogy  $a > b$ .

## T-4. feladat

Legyen  $p$  egy kettőnél nagyobb prímszám. Az  $S = \{1, 2, \dots, p\}$  halmaz tetszőleges  $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(p))$  permutációjára  $f(\pi)$ -vel jelöljük a

$$\pi(1), \pi(1) + \pi(2), \dots, \pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(p).$$

számok között a  $p$ -vel oszthatók számát. Tekintve  $S$  összes permutációját, határozzuk meg az  $f(\pi)$  értékek átlagát.



**T-5. feladat**

Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalának felezőpontját jelölje  $K$ . Az  $AC$  oldalon levő  $L$  pontra és a  $BC$  oldalon levő  $M$  pontra teljesül, hogy:  $CLK \sphericalangle = KMC \sphericalangle$ . Bizonyítsuk be, hogy az  $AB$  oldalra a  $K$  pontban, az  $AC$  oldalra az  $L$  pontban és a  $BC$  oldalra az  $M$  pontban állított merőlegesek egy ponton mennek át.

**T-6. feladat**

A párhuzamos oldalakkal nem rendelkező  $ABCD$  konvex négyszögben  $ABC \sphericalangle = CDA \sphericalangle$ . A szomszédos csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontjai az  $EFGH$  konvex négyszöget alkotják. Legyen  $K$  az  $EFGH$  négyszög átlóinak metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy az  $AB$  és  $CD$  egyenesek egymást a  $BKD$  háromszög köréírt körén metszik.

**T-7. feladat**

Határozzuk meg az összes, pozitív egészekből álló  $(x, y, z)$  számhármast, amely teljesíti a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^y + y^x &= z^y, \\x^y + 2012 &= y^{z+1}.\end{aligned}$$

**T-8. feladat**

Léteznek-e olyan  $a$  és  $b$  pozitív egész számok, melyekre teljesül, hogy  $d(a) = d(b)$  és  $d(a^2) = d(b^2)$ , azonban  $d(a^3) \neq d(b^3)$ , ahol  $d(n)$  jelöli az  $n$  pozitív egész szám pozitív osztóinak számát.

*Language: Hungarian*

*A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.*

*Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.*

*Minden feladat 8 pontot ér.*

*A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.*