## I–1. feladat

Határozd meg az összes $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$xf(y) + f\bigl(xf(y)\bigr) - xf\bigl(f(y)\bigr) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

## I–2. feladat

Tekintsük szabályos $n$-szögeknek olyan felosztásait, melyekben $n-3$, az $n$-szög belsejében egymást nem metsző átló behúzásával $n-2$ háromszögre vágjuk fel a sokszöget. Nevezzük *kétszínű háromszögelés*nek azt, amit egy ilyen szétvágásból kapunk, ha minden háromszögét kiszínezzük feketére vagy fehérre úgy, hogy élszomszédos háromszögek mindig különböző színűek legyenek. Nevezzünk továbbá egy $n \geqslant 4$ egész számot *háromszögelhető*nek, ha a szabályos $n$-szögek mindegyikének van olyan kétszínű háromszögelése, amelyben az $n$-szög minden $A$ csúcsára teljesül, hogy több olyan fekete háromszög van, aminek $A$ az egyik csúcsa, mint ahány olyan fehér háromszög van, aminek $A$ az egyik csúcsa.

Határozd meg az összes háromszögelhető számot.

## I–3. feladat

Legyen az $ABC$ háromszögben $AB < AC$ és legyen $I$ a beírt körének középpontja. Legyen továbbá $E$ az $AC$ oldal azon pontja, amelyre $AE = AB$ teljesül. Végül legyen $G$ az a pont az $EI$ egyenesen, amelyre igaz, hogy $IBG\measuredangle = CBA\measuredangle$, valamint $E$ és $G$ az $I$ pont ellentétes oldalán fekszenek.

Bizonyítsd be, hogy az $AI$ egyenes, az $AE$-re $E$-ben állított merőleges és a $BGI\measuredangle$ szögfelezője egy ponton mennek át.

## I–4. feladat

Adott $n \geqslant k \geqslant 0$ egész számokra a következőképpen definiáljuk az $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ *bibinomiális együtthatót*:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}\,.$$

Határozd meg az összes olyan egész számokból álló $(n,k)$ számpárt, ahol $n \geqslant k \geqslant 0$ és a belőlük képzett bibinomiális együttható értéke egész szám.

*Megjegyzés: az $n!!$ szemifaktoriális az $n$-nél nem nagyobb pozitív páros számok szorzata, ha $n$ páros, illetve az $n$-nél nem nagyobb pozitív páratlan számok szorzata, ha $n$ páratlan. Tehát például:* $0!! = 1$, $4!! = 2 \cdot 4 = 8$ *és* $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

---

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.