I–1. Feladat

Legyen $\mathbb{N}^+$ a pozitív egész számok halmaza. Határozd meg az összes olyan k pozitív egész számot, melyre léteznek $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ és $g\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ függvények úgy, hogy g végtelen sok értéket felvesz, és

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

teljesül minden pozitív egész n esetén.

(*Megjegyzés.* Itt f^i az f függvény i-szer alkalmazását jelöli, azaz $f^i(j) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{i\text{-szer}}(j))\ldots)).$)

I–2. Feladat

Egy N pozitív egész számot *fertőző*nek nevezünk, ha létezik 1000 egymást követő nemnegatív egész szám úgy, hogy az összes számjegyeiknek az összege N. Találd meg az összes fertőző pozitív egész számot.

I–3. Feladat

Legyen ABC hegyesszögű, nem egyenlőszárú háromszög, melynek ω a köréírt köre és I a beírt körének középpontja. Tegyük fel, hogy a BIC háromszög H magasságpontja ω belsejébe esik. Legyen M az ω kör hosszabbik BC ívének felezőpontja. Legyen N az ω kör rövidebb AM ívének felezőpontja.

Igazold, hogy létezik egy kör, mely ω-t az N pontban érinti, valamint érinti BHI és CHI köréírt köreit.

I–4. Feladat

Találd meg az összes olyan n pozitív egész számot, melyre léteznek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív egész számok úgy, hogy

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.