I–1. Feladat

Legyen $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Határozd meg az összes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x + f(x + y)) = x + f(f(x) + y)$$

teljesül minden x, $y \in \mathbb{R}$ esetén.

I–2. Feladat

Legyen n egy pozitív egész szám. Anna és Beatrice egy n kártyából álló paklival játszanak, melynek a lapjai meg vannak számozva az $1, 2, \ldots, n$ számokkal. Kezdetben a pakli meg van keverve. A játékosok felváltva lépnek, Anna kezd. Egy játékos a lépésében megnézi az összes lapot, majd átrendezi a pakli felső k lapját, ahol k a legfelső lapon lévő számot jelöli. Ha az átrendezés után továbbra is a k-t tartalmazó kártya van legfelül, akkor a játékos vesztett, és a játék véget ért. Különben a másik játékos lépése következik. Határozd meg a pakli kiinduló állásának függvényében, hogy van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája, és ha igen, kinek.

I–3. Feladat

Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, melyre $DAB\sphericalangle < 90^\circ$. Legyen $E \neq B$ az a pont a BC egyenesen, melyre $AE = AB$. Hasonlóan legyen $F \neq D$ az a pont a CD egyenesen, melyre $AF = AD$. A CEF háromszög köréírt köre az AE egyenest másodszor a P pontban metszi, az AF egyenest másodszor a Q pontban metszi. Legyen X a P pont tükörképe a DE egyenesre, és legyen Y a Q pont tükörképe a BF egyenesre. Bizonyítsd be, hogy A, X és Y egy egyenesre esnek.

I–4. Feladat

Egy táblán kezdetben az a és b pozitív egész számok vannak, melyekre $a \neq b$. Minden lépésben Andrea választ egy x és egy y számot a tábláról, melyekre $x \neq y$, és felírja az

$$(x, y) + [x, y]$$

számot is a táblára. Legyen n egy pozitív egész szám. Bizonyítsd be, hogy bármik is legyenek az a és b számok, Andrea tud véges sok lépést tenni, melyek után a táblán szerepel az n szám egy többszöröse.

Megjegyzés. Ha x és y két pozitív egész szám, akkor (x, y) a legnagyobb közös osztójukat jelöli, $[x, y]$ pedig a legkisebb közös többszörösüket.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.