T–1. Feladat

Adott egy valós számokból álló (a_0, b_0) számpár. Definiáljuk az a_0, a_1, a_2, … és b_0, b_1, b_2, … valós számokból álló sorozatokat úgy, hogy

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{és} \quad b_{n+1} = a_n \cdot b_n$$

teljesül minden $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ esetén. Találjátok meg az összes valós számokból álló (a_0, b_0) számpárt, melyre $a_{2022} = a_0$ és $b_{2022} = b_0$.

T–2. Feladat

Legyen k egy pozitív egész, és legyenek a_1, a_2, …, a_k nemnegatív valós számok. Kezdetben fel van írva a táblára egy $n \geq k$ darab nullából álló sorozat. Minden lépésben John választ k szomszédos számot a táblán, és az elsőt megnöveli a_1-gyel, a másodikat a_2-vel, és így tovább, míg végül az utolsó kiválasztott számot megnöveli a_k-val. Néhány lépés után a táblán az összes szám egyenlő. Bizonyítsátok be, hogy az a_1, a_2, …, a_k számok nemnulla tagjai mind egyenlőek.

T–3. Feladat

Legyen n egy pozitív egész szám. Egy sorban n lila és n fehér tehén áll valamilyen sorrendben. Tim szét szeretné válogatni szín szerint a teheneket úgy, hogy a lila tehenek vannak a sor elején. Egy lépésben megcserélhet két szomszédos, azonos számú tehénből álló csoportot. Legkevesebb hány lépésre van szüksége Timnek, hogy tetszőleges kiinduló állásból el tudja érni a célját?

Példa. Timnek szabad például a következő három cserét elvégeznie:

$$F\underline{LF}\overline{LL}F \longrightarrow \underline{F}\overline{L}LLFF \longrightarrow L\underline{FL}\overline{LF}F \longrightarrow LLFFLF.$$

T–4. Feladat

Legyen n egy pozitív egész szám. Adott egy $2n \times 2n$-es táblázat. Minden mezője meg van színezve $2n^2$ különböző szín valamelyikével úgy, hogy minden szín pontosan két mezőhöz van használva. Jana a táblázat egyik mezőjében áll, és valamelyik másik mezőben egy tábla csoki található. Jana el szeretne jutni a tábla csokihoz. Minden lépésben Jana a következő kétféle helyváltoztatási módszer egyikét csinálhatja. Vagy átsétál egy szomszédos mezőbe, vagy átteleportál a másik mezőbe, aminek a színe megegyezik a jelenlegi mezőjének színével. (Jana egy azonos színű szomszédos mezőbe sétálással és teleportálással is eljuthat.) Döntsétek el, hogy Jana mindig el tud-e jutni a tábla csokihoz, függetlenül a kezdeti konfigurációtól, ha felváltva kell használnia a kétféle helyváltoztatási módszert, teleportálással kezdve.

Megjegyzés. Két mező szomszédos, ha van egy közös élük.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. Feladat

Legyen Ω az ABC háromszög köréírt köre, ahol $CAB\sphericalangle = 90°$. A B-ből és C-ből induló súlyvonalak rendre a D és E pontokban metszik másodszor az Ω kört. Az Ω körhöz D-ben húzott érintő az AC egyenest X-ben metszi, és az E-ben húzott érintő az AB egyenest Y-ban metszi. Igazoljátok, hogy az XY egyenes érinti az Ω kört.

T–6. Feladat

Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, melyben $AC = BD$, és az AB és CD oldalak nem párhuzamosak. Legyen P az AC és BD átlók metszéspontja. Legyenek az E és F pontok rendre a BP és AP szakaszokon úgy, hogy $PC = PE$ és $PD = PF$. Bizonyítsátok be, hogy az AB, CD és EF egyenesek által meghatározott háromszög köréírt köre érinti az ABP háromszög köréírt körét.

T–7. Feladat

Jelölje $\mathbb{N}^+$ a pozitív egész számok halmazát. Határozzátok meg az összes $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ függvényt, melyre $f(1) \le f(2) \le f(3) \le \dots$, továbbá $f(n)+n+1$ és $f(f(n))-f(n)$ négyzetszámok minden pozitív egész n esetén.

T–8. Feladat

Egy pozitív egész számot *pontos*nak nevezünk, ha a számjegyeinek átlagát (tízes számrendszerben) megkaphatjuk úgy, hogy egy tizedesvesszőt rakunk a bal oldalon álló számjegy után. Bizonyítsátok be, hogy csak véges sok pontos szám létezik.

Példa. A 2250 pontos, mivel a számjegyeinek átlaga $2,250$.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.